中等职业学校
数学学习指导与练习

（第 3 册）

孙明红　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

《中等职业学校数学学习指导与练习》是学生掌握数学知识、培养数学能力的辅导用书。本套书共 3 册，本书是第 3 册。本书以指导和训练为主，概要地介绍中等职业学校学生必修的部分数学课内容。

本书的主要特点是：用简练的语言总结数学概念，用具体的例题来讲解解题思路，题型覆盖面广，解题思路灵活。学生可通过书中大量的同步训练题和综合练习题来加深理解。

本书突出基础性、实用性、灵活性和训练性，是中等职业学校教师教学和学生学习的必备参考读物。

图书在版编目（CIP）数据

中等职业学校数学学习指导与练习. 第 3 册 / 孙明红主编. —北京：电子工业出版社，2010.7

ISBN 978-7-121-11247-8

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①数学课—专业学校—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 125552 号

责任编辑：蔡　葵
文字编辑：刘文杰
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17.5　字数：448 千字
印　　次：2010 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：30 000 册　　定价：21.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

数学是学生必须学好的一门文化课，同时也是学生学好后续专业课的基础。数学的思想、内容、方法和语言在现代科学技术、生产和生活中的应用越来越广泛，成为现代文化不可缺少的组成部分，它对于提高学生的数学素养，提高学生分析问题、解决问题的能力，发展学生的创新意识，培养其科学的思维方法和辩证唯物主义思想有着不可替代的作用。我们编写这套学习指导与训练，就是要为学生学好数学提供有力的支持。

本书共分 3 册，分别与人民教育出版社出版的山东省中等职业学校《数学》教材第 1、2、3 册配套。内容包括：学习目标、学法指导、同步训练、知识链接四个部分。其中，学法指导部分包括例题赏析或易错易混问题剖析，力求在开拓学生的解题思路、引导学生掌握适当的数学思想方法、澄清错误的认识等方面发挥重要作用。而同步训练部分设有 A、B 两组题目，A 组题目主要是为巩固掌握课本知识，形成初步技能而设计的基本题；B 组题目为提高学生分析问题、解决问题的能力而设，供学有余力的学生选用。知识链接为学生学习下节内容进行适当的铺垫，每一单元、每一章都有一份适当的测试题。每册书的最后都附有同步训练题、单元测试题和综合测试题的答案与提示。

本书既是学生学好数学的科学指导，又是学习数学过程中必不可少的同步训练册。其主要特点如下：

1．科学性强。力求没有科学性错误，更注重符合学生的认知规律，符合职业学校的教学实际。训练题分 A、B 两组，题目的设置由易到难，教师可根据学生的实际指导学生有针对性地进行练习，体现了分层次教学的思想。

2．趣味性强。这套学习指导与训练并不仅限于学习指导同步训练的题目，而且选用适量的小知识、趣味题、名人名言等，希望能为激发学生的学习兴趣做出贡献。

3．注重数学思想方法的指导与训练。例题都是精选的、典型的。解答过程前有思路分析、后有点拨或点评，对于开拓学生思路、培养探索精神大有裨益。

本书由孙明红主编，副主编为李励信、陆泽贵。参加编写的还有：祁志卫、王智海、李增华、徐刚、刘学卫、杜红梅、李长林、鹿继梅、贾艳、孙壮丽、闫桂明、付桂森、肖赛芹、王会芹、刘明远、相恒山。

根据教育部 2009 年初印发的新修订的中等职业学校数学教学大纲，对本书作了新的修订，增加了大纲新增添的“编制计划的原理和方法”、“线性规划初步”等章节的内容。本书的编写、修订得到了山东省各市职教室（职教科）和各职业学校的领导、老师和同学们的大力支持，特此一并致谢。

编写一套适合职业学校特点的学习指导与训练，并非易事，但我们会继续努力，认真学习，加强理论与实践的结合。同时，也希望广大教师和同学们在使用过程中及时提出宝贵的意见，以便我们及时修改补充，使其日臻完善。

编　者

2010 年 5 月

目　录

思想火花

任何业绩的质变都来自于量变的积累.

第 12 章　三角计算及其应用

12.1　和 角 公 式

12.1.1　两角和与差的余弦

【学习目标】

1．熟练掌握两角和与差的余弦公式；
2．能够熟练使用两角和与差的余弦公式解决相关问题.

【学法指导】

1．公式 $C_{\alpha+\beta}$ 与 $C_{\alpha-\beta}$ 中的 α，β 具有任意性.
2．注意拆角、拼角的技巧．例如 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$.

例题赏析

例 1　已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha$、$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

分析：要求 $\alpha+\beta$ 的值，根据已知条件求出 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 的值；代入两角和的余弦公式求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值；根据 α 和 β 的范围，确定出 $\alpha+\beta$ 的范围；求出 $\alpha+\beta$ 的值.

解：因为 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；

因为 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

于是
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，

所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

点拨：这是一个由三角函数值求角的问题，需按以下步骤完成：
（1）选择适当的和角公式，求出所求角的某一三角函数值；
（2）讨论所求角的范围；
（3）据值求角.

例 2　已知 $\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

分析：要求 $\cos(\alpha-\beta)$，只需求 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 的值．将已知两个等式的两边分别平

方，它们的左边分别有 $\cos\alpha\cos\beta$ 和 $\sin\alpha\sin\beta$，然后两式相加即可求出结果.

解：因为 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，

所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$， ①

因为 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{9}$， ②

①+② 得

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9},$$

所以 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{36}$，即 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{59}{72}$.

【同步训练 12.1.1】

A　组

1．填空题：

（1）$\cos 50°\cos 20°+\sin 50°\sin 20°=$ ＿＿＿＿＿＿；

（2）$\cos 25°\cos 5°-\sin 25°\sin 5°=$ ＿＿＿＿＿＿；

（3）$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=$ ＿＿＿＿＿＿；

（4）若 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 是第三象限角，则 $\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)=$ ＿＿＿＿＿＿.

2．选择题：

（1）$\cos(30°+\alpha)+\cos(30°-\alpha)$ 等于（　　）.

（A）$\cos 120°$　（B）$\sin\alpha$　（C）$\cos\alpha$　（D）$\sqrt{3}\cos\alpha$

（2）$\cos(21°+\alpha)\cos(24°-\alpha)-\sin(21°+\alpha)\sin(24°-\alpha)$ 等于（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（B）$\cos 2\alpha$　（C）1　（D）$\cos(-3°+2\alpha)$

3．解答题：

（1）已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$，α，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求：$\cos(\alpha+\beta)$，并判断 $\alpha+\beta$ 的范围；

（2）已知 $13\cos\alpha+5\cos\beta=9$，$13\sin\alpha+5\sin\beta=15$，求 $\cos(\alpha-\beta)$.

B　组

1．填空题：

（1）$\cos(60°+x)+\cos(60°-x)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

（2）$\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

（3）函数 $y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ 的最小正周期为＿＿＿＿＿＿＿＿.

2．选择题：

（1）在△ABC 中，已知 $\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B=0$，则△$ABC$ 是（　　）.

（A）直角三角形　　（B）锐角三角形

（C）钝角三角形　　（D）等腰非直角三角形

（2）函数 $y=\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x$（$x\in\mathbf{R}$）的图像关于（　　）.

（A）x 轴对称　　（B）y 轴对称

（C）直线 $y=x$ 对称　　（D）原点对称

（3）已知 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\cos(\alpha-\beta)$的值是（　　）.

（A）1　　（B）-1　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$-\dfrac{1}{2}$

3．解答题：

（1）计算：$\cos 72^\circ(\cos 72^\circ-\cos 12^\circ)+\sin 72^\circ(\sin 72^\circ-\sin 12^\circ)$；

（2）已知 $\cos(\alpha-\dfrac{\beta}{2})=-\dfrac{1}{9}$，$\sin(\dfrac{\alpha}{2}-\beta)=\dfrac{2}{3}$，且$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，

求：$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；

（3）已知α、β都是锐角，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，

求 $\cos\beta$ 及 β 的值.

【知识链接】

利用诱导公式填空：

（1）$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=$ __________；　　（2）$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=$ __________；

（3）$\cos[\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=$ __________；　　（4）$\cos[\dfrac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)]=$ __________.

12.1.2　两角和与差的正弦

【学习目标】

1．熟练掌握两角和与差的正弦公式；

2．能够熟练使用两角和与差的正弦公式解决有关的问题；

3．逐步培养逆向思维能力，领会从一般到特殊的基本数学思想和化归思想.

【学法指导】

最好与两角和与差的余弦公式对比来学习两角和与差的正弦公式.

例题赏析

例　已知 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$，且 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$.

分析： 要求 $\sin 2\alpha$，而条件中只有 $\cos(\alpha-\beta)$、$\sin(\alpha+\beta)$的值，因此，首先考虑把 2α 用$(\alpha-\beta)$和$(\alpha+\beta)$表示出来，即 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，再根据已知条件求出 $\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$；用两角和的正弦公式求出 $\sin 2\alpha$.

解： 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，

所以 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，又因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{4}{5}$，

又因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{4}<-\beta<0$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，

又因为$\alpha<\beta$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\beta<0$，

又因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\frac{5}{13}$，

而 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，

所以

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]\\&=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{16}{65}.\end{aligned}$$

点拨： 适当地进行角的变形（用已知三角函数值的角来表示未知角）是解决这类问题的关键，但求解三角函数值时，不要忽略讨论角的范围.

【同步训练 12.1.2】

A　组

1．填空题：

（1）$\sin 58^\circ\cos 13^\circ-\cos 58^\circ\sin 13^\circ=$____________；

（2）$\sin(36^\circ-x)\cos(54^\circ+x)+\cos(36^\circ-x)\sin(54^\circ+x)=$__________；

（3）$\sin 75^\circ=$________________.

2．选择题：

（1）$\cos x\sin(y-x)+\cos(y-x)\sin x$ 等于（　　）.

（A）$\sin y$　　（B）1　　（C）$\cos x$　　（D）$\cos x\sin y$

（2）已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\alpha$，$\beta$都是锐角，则 $\sin\beta$等于（　　）.

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{17}{25}$　　（D）$\frac{7}{25}$

（3）已知向量$\overrightarrow{OP}=(4,4)$，将其绕坐标原点旋转$-90^\circ$到$\overrightarrow{OP_1}$的位置，则 P_1 的坐标为（　　）.

（A）$(-4,4)$　　（B）$(-4,-4)$　　（C）$(4,-4)$　　（D）$(-8,-8)$

（4）如果 $2\sin\alpha=2a-3$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

（A）$(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$　　（B）$[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$　　（C）$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$　　（D）$[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

3．解答题：

（1）已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$，$\alpha$，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求 $\sin(\alpha+\beta)$和 $\sin(\alpha-\beta)$.

（2）已知 $13\sin\alpha+5\cos\beta=9$，$13\cos\alpha+5\sin\beta=15$，求 $\sin(\alpha+\beta)$.

B　组

1．填空题：

（1）$\sin 32°\cos 13°+\cos 32°\sin 13°=$________；

（2）函数 $y=\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x$ 的值域为________；

（3）设 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，则 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=$________，$\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})=$________.

2．选择题：

（1）在△ABC 中，已知 $\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B=1$，则△$ABC$ 是（　　）.

（A）直角三角形　　（B）锐角三角形

（C）钝角三角形　　（D）等腰非直角三角形

（2）$\sin(60°+\alpha)-\sin(60°-\alpha)$等于（　　）.

（A）$\cos\alpha$　　（B）$\sqrt{3}\cos\alpha$

（C）$\sin\alpha$　　（D）$\sqrt{3}\sin\alpha$

（3）已知向量 $\overrightarrow{OP}=(3,0)$ 绕坐标原点旋转 90° 到 $\overrightarrow{OP_1}$ 的位置，则 P_1 的坐标是（　　）.

（A）$(3,3)$　　（B）$(-3,0)$　　（C）$(0,-3)$　　（D）$(0,3)$

（4）函数 $y=\sin\dfrac{2x}{3}\cos\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$（$x\in\mathbf{R}$）的图像关于（　　）.

（A）x 轴对称　　（B）y 轴对称

（C）原点对称　　（D）直线 $y=x$ 对称

3．解答题：

（1）已知点 $P(-3,4)$在角α 的终边上，点 $Q(-2,-1)$在角β 的终边上，求 $\sin(\alpha+\beta)$和 $\sin(\alpha-\beta)$的值.

（2）已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{4}{5}$，且$\alpha+\beta\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，$\alpha-\beta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$．求：$\sin 2\alpha$.

【知识链接】

利用同角三角函数关系填空：

1．$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$__________.

2．$\tan(\alpha+\beta)=$ ______________.

12.1.3　两角和与差的正切

【学习目标】

1．熟练掌握两角和与差的正切公式；

2．能够熟练使用两角和与差的正切公式解决有关数学问题；

3．逐步培养逆向思维能力和领会从一般到特殊的基本数学思想和化归思想.

【学法指导】

1．要注意公式 $T_{\alpha+\beta}$ 与 $T_{\alpha-\beta}$ 中的α，β的取值范围.

2．注意拆角、拼角的技巧．例 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$.

例题赏析

例 1　已知 $\tan\alpha$和 $\tan\beta$是方程 $x^2-11x-10=0$ 的两个根，

求证：$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

分析：要证 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，只需证 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=1$，即证 $\tan(\alpha+\beta)=1$．由一元二次方程根与系数的关系可求出 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 的和与积，这样就可以求出 $\tan(\alpha+\beta)$.

证明：因为 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 是方程 $x^2-11x-10=0$ 的两个根，

所以 $\tan\alpha+\tan\beta=11$，$\tan\alpha\tan\beta=-10$，

于是 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{11}{1+10}=1$，

即 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=1$，故 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

点拨：此题是多个公式综合运用，体现了数学的整体思想.

例 2　利用和角公式计算$\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$的值.

分析：因为 $\tan 45^\circ=1$，所以原式可以看成$\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}$，然后利用正切的和角公式，把原式化为 $\tan(45^\circ+15^\circ)$，从而求得原式的值.

解：因为 $\tan 45^\circ=1$，

所以

$$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}$$
$$=\tan(45^\circ+15^\circ)$$
$$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}.$$

点拨：两角和与差的正切公式的逆用及特殊角的三角函数值的应用.

【同步训练 12.1.3】

A　组

1．填空题：

（1）$\dfrac{\tan 85^\circ-\tan 40^\circ}{1+\tan 85^\circ\tan 40^\circ}=$ ____________；

（2）$\dfrac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$__________；

（3）已知 $\tan x=\dfrac{1}{4}$，$\tan y=-3$，则 $\tan(x+y)=$________，$\tan(x-y)=$__________.

2．选择题：

（1）设 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 是方程 $7x^2-8x+1=0$ 的两个根，则 $\tan(\alpha+\beta)$等于（　　）.

（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$-\dfrac{4}{3}$　　（D）$-\dfrac{3}{4}$

（2）$\dfrac{\tan\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{5\pi}{12}}$等于（　　）.

（A）$\sqrt{3}$　　（B）-1　　（C）$-\sqrt{3}$　　（D）1

（3）若 $\tan\alpha=2$，则 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})$的值是（　　）.

（A）3　　（B）-3　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$-\dfrac{1}{3}$

3．解答题：

（1）已知 $A+B=45^\circ$，求证：$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$；

（2）利用和（差）角公式化简：

①$\dfrac{\tan 53^\circ-\tan 23^\circ}{1+\tan 53^\circ\tan 23^\circ}$；　②$\dfrac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$；　③$\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$.

B　组

1．填空题：

（1）若$\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，则$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$______________；

（2）已知 $\tan\alpha=2k+1$，$\tan\beta=2k-1$，且 $k\neq 0$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$________；

（3）设 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{5}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$________，$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=$__________.

2．选择题：

（1）若 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=-2$，则 $\tan\alpha$ 的值是（　　）.

（A）$-\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$　　（C）3　　（D）-3

（2）$\dfrac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}$的值等于（　　）.

（A）$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$-\sqrt{3}$

（3）已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，则 $\tan\alpha$的值是（　　）.

（A）-7　　（B）$-\dfrac{1}{7}$　　（C）$\dfrac{1}{7}$　　（D）7

3．解答题：

（1）计算：$\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ$；

（2）已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

（3）若 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 是方程 $x^2+4x+3=0$ 的两个根，求 $\tan(\alpha+\beta)$.

【知识链接】

填空：

在公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$ 和 $T_{\alpha+\beta}$ 中，若令 $\beta=\alpha$ ，则 $\sin 2\alpha=$__________，$\cos 2\alpha=$__________，$\tan 2\alpha=$________________.

12.2 倍 角 公 式

【学习目标】

1．熟练掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式；

2．灵活运用倍角公式进行三角函数的求值、化简以及恒等式的证明；

3．领会从一般到特殊的基本数学思想和化归思想.

【学法指导】

理解二倍角概念的相对性，不仅仅 2α 是 α 的二倍角，而 6α 与 3α、4α 与 2α、3α 与 $\dfrac{3\alpha}{2}$、$\dfrac{\alpha}{2}$ 与 $\dfrac{\alpha}{4}$ 等都是二倍角关系.

例题赏析

例　已知 $\sin\theta+2\cos\theta=0$，求 $\dfrac{\cos 2\theta-\sin 2\theta}{1+\cos^2\theta}$ 的值.

分析：利用已知条件和二倍角公式，把所求式子的分子和分母都化成含有同一个角的同种三角函数的式子.

解：因为 $\sin\theta+2\cos\theta=0$，所以 $\sin\theta=-2\cos\theta$，

于是

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2\theta-\sin 2\theta}{1+\cos^2\theta} &= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}\\ &= \frac{\cos^2\theta-4\cos^2\theta+4\cos^2\theta}{4\cos^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}\\ &= \frac{\cos^2\theta}{6\cos^2\theta}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

【同步训练 12.2】

A　组

1．填空题：

（1）$\sin 15^\circ\cos 15^\circ=$_______，$1-2\sin^2\dfrac{\pi}{8}=$_______；

（2）若 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，则 $\sin 2\theta=$_______，$\cos 2\theta=$___________；

（3）已知θ是$\triangle ABC$ 的一个内角，若 $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$，则$\theta=$_______；

（4）函数 $y=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$的最小正周期为_______；

（5）函数 $y=\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}$的最小正周期是____________.

2．选择题：

（1）$\sin(-\dfrac{\pi}{8})\cos(-\dfrac{\pi}{8})$等于（　　）.

（A）$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（C）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin 2\alpha$ 等于（　　）.

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$-\dfrac{3}{4}$　　（D）$-\dfrac{1}{4}$

（3）函数 $f(x)=2\sin(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2})\cos(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2})$的图像关于（　　）.

（A）x 轴对称　　（B）y 轴对称

（C）原点对称　　（D）直线 $y=x$ 对称

（4）$1+2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$等于（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

3．解答题：

（1）已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，α为锐角，求 $2\cos^2(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{2})-1$ 的值；

（2）已知 $0^\circ<\alpha<45^\circ$，化简$\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}$；

（3）已知 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，且$\alpha\in(\dfrac{3\pi}{2}，2\pi)$，求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$.

B　组

1．填空题：

（1）$\cos^2 75^\circ+\cos^2 15^\circ+\cos 75^\circ\cos 15^\circ=$_______；

（2）$\dfrac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}=$________；

（3）已知$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$________.

2．解答题：

（1）已知 2θ 为第三象限角，$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{5}{9}$，求 $\sin 2\theta$.

（2）证明：$\dfrac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$.

【知识链接】

1．正弦函数 $y=\sin x$ 有哪些性质（五条）？

2．你能说出函数 $y=2\sin x$ 的最大值、最小值和周期各是多少吗？

12.3　正弦型函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像和性质

【学习目标】

1．了解正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与正弦函数 $y=\sin x$ 的图像之间的关系；

2．会用“五点法”画出正弦型函数的图像；

3．掌握正弦型函数的性质，会求正弦型函数的周期、最大值及最小值.

【学法指导】

1．用“五点法”画出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$在长度为一个周期的闭区间上的简图时，正确列表是关键．x 的五个取值就是使$\omega x+\varphi(\omega>0)$分别等于 0，$\dfrac{\pi}{2}$，$\pi$，$\dfrac{3\pi}{2}$，$2\pi$ 时解得的，而这五个值中的最后一个值与第一个值的差恰好是正弦型函数的一个周期长度.

2．若求函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值、最小值和周期，应先将其化成正弦型函数 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$（其中 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$），从而得到$y_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}$，$y_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2}$，周期 $T=2\pi$.

例题赏析

例 1 求使函数 $y=2-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$取得最大值、最小值时 x 的取值集合，并求出这个函数的最大值和最小值.

分析：要使函数 $y=2-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$取得最大值，因为 2 是常数，故需$-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$取得最大值，即 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$取得最小值；同样地，要使函数 $y=2-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$取得最小值，因为 2 是常数，故需

$-\sin(x-\frac{\pi}{4})$取得最小值，即 $\sin(x-\frac{\pi}{4})$取得最大值.

解：当 $\sin(x-\frac{\pi}{4})$取得最小值-1 时，$y_{\max}=2+1=3$；此时，$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最大值的 x 的集合是 $\{x \mid x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$.

当 $\sin(x-\frac{\pi}{4})$取得最大值 1 时，$y_{\min}=2-1=1$；此时，$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最小值的 x 的集合是 $\{x \mid x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$.

例 2　已知函数 $y=f(x)=\sin 2x+\cos 2x$，$\alpha\in(0,\pi)$，$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

解：
$$y=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)$$
$$=\sqrt{2}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{4})$$
$$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}),$$

因为 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，由此得到 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，

$$\sin\alpha=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]$$
$$=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4};$$

当 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，

$$\sin\alpha=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]$$
$$=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};$$

因为$\alpha\in(0，\pi)$，$\sin\alpha>0$，故 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

点拨：对于形如 $y=a\sin x+b\cos x$ 的函数，关键是把它化成正弦型函数 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$（其中 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$），在进行求值时，应注意角的表示，尽量用“已知”角来表示所求角.

【同步训练 12.3】

A 组

1．填空题：

（1）函数 $y=2\sin 2x$ 的最大值是______，最小值时______，周期是______；

（2）函数 $y=2\sin\frac{1}{2}x$ 的最大值是______，最小值时______，周期是______；

（3）函数 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{4})$的最大值是______，最小值时______，周期是______；

（4）函数 $y=3\sin x+4\cos x$ 的最大值是_____，最小值时_____，周期是_____.

2．选择题：

（1）函数 $y=\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})$的周期是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）π　　（D）2π

（2）为了得到函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})(x\in\mathbf{R})$的图像，只需把正弦曲线 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$上所有的点（　　）.

（A）向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　（B）向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

（C）向左平移 $\frac{1}{4}$ 个单位　　（D）向右平移 $\frac{1}{4}$ 个单位

（3）为了得到函数 $y=\sin\frac{x}{2}(x\in\mathbf{R})$的图像，只需把正弦曲线 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$上所有点的（　　）.

（A）横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变

（B）横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变

（C）纵坐标变为原来的 2 倍，横坐标不变

（D）纵坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，横坐标不变

（4）为了得到函数 $y=\frac{1}{5}\sin x\ (x\in\mathbf{R})$的图像，只需把正弦曲线 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$上所有点的（　　）.

（A）横坐标变为原来的 5 倍，纵坐标不变

（B）横坐标变为原来的 $\frac{1}{5}$ 倍，纵坐标不变

（C）纵坐标变为原来的 5 倍，横坐标不变

（D）纵坐标变为原来的 $\frac{1}{5}$ 倍，横坐标不变

3．作出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

（1）$y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$；

（2） $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

B　　组

1．函数 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{6})$与 $y=\sin x$ 的图像有什么关系？

2．求下列函数的最大值、最小值和周期，并求出使函数取得最大值和最小值时 x 的取值集合：

（1）$y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$；

（2）$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$；

（3）$y=\sin x+\cos x$.

【知识链接】

1．已知：$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，
求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；（3）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2．如图 12-1 所示，在△ABC 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，
（1）用 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{BC}$；
（2）设$|\boldsymbol{c}|=c$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\theta$，$|\overrightarrow{BC}|=a$，求 a^2.

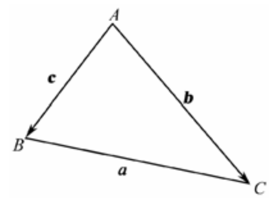


图 12-1

12.4　解 三 角 形

12.4.1　余弦定理

【学习目标】

1．熟练掌握余弦定理；
2．灵活运用余弦定理解三角形.

【学法指导】

1．知道余弦定理是勾股定理的推广，而勾股定理是余弦定理的特例；
2．应用余弦定理来求三角形的未知元素，主要有以下两种情形：
（1）已知三角形的两边及其夹角，求其他元素；

（2）已知三角形的三边求其他元素.

例题赏析

例 在△ABC 中，$a:b:c=(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:2$，求△$ABC$ 的最小角的度数.

分析：要求△ABC 的最小角，必须先确定最小边，然后根据余弦定理即可求出最小角.

解：$a:b:c=(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:2$，

所以可设 $a=(\sqrt{3}+1)x$，$b=\sqrt{6}x$，$c=2x$（$x>0$）.

显然 $a>b>c$，所以 $A>B>C$，最小角为$\angle C$.

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2x^2+(\sqrt{6}x)^2-(2x)^2}{2(\sqrt{3}+1)x\cdot\sqrt{6}x}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-4}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以$\angle C=45°$，即△ABC 的最小角为 45°.

点拨：求三角形的最大（小）角的一般思路是：

（1）先判断出最大（小）边；

（2）求最大（小）边所对角的余弦值；

（3）根据求得的余弦值确定最大（小）角的值.

【同步训练 12.4.1】

A　　组

1．填空题：

（1）若△ABC 三边之比为 3∶5∶7，则其最大角为_______；

（2）在△ABC 中，若 $a=6$，$b=3$，$\angle C=120°$，则 $c=$_____，$\cos A=$____；

（3）在△ABC 中，a=5，b=6，c=9，则△ABC 为_______三角形；

（4）在△ABC 中，$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，则$\angle A=$_______；

（5）在△ABC 中，$b=6$，$c=4$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，且 A 为锐角，则 $a=$_______.

2．选择题：

（1）在△ABC 中，若 $a=2$，$c=1$，$\angle B=30°$，则△ABC 是（　　）.

（A）直角三角形　　（B）锐角三角形

（C）等腰三角形　　（D）钝角三角形

（2）在△ABC 中，$a=2\sqrt{6}$，$b=6+2\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{3}$，那么（　　）.

（A）$A<B<C$　　（B）$A>B>C$

（C）$A<C<B$　　（D）$A>C>B$

（3）在△ABC 中，$a^2=b^2+c^2+bc$，则$\angle A$ 等于（　　）.

（A）120°　　（B）60°　　（C）45°　　（D）30°

3．解答题：

（1）在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=7$，$AD=6$，$\angle DAB=60°$，求对角线 AC 的长；

（2）在$\triangle ABC$中，$b\cos A = a\cos B$，试判断$\triangle ABC$的形状.

B　　组

1．填空题：

（1）在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数成等差数列，则$\angle B =$____________；

（2）在$\triangle ABC$中，若$\sin A\cos A = 0$，则$\angle A =$____________.

2．选择题：

（1）在$\triangle ABC$中，$\sin A = \dfrac{4}{5}$，且A为钝角，$AB = 3$，$AC = 5$，则BC等（　　）.

（A）$2\sqrt{13}$　　（B）$\sqrt{10}$　　（C）4　　（D）$2\sqrt{10}$

（2）在$\triangle ABC$中，若$\sin 2A = \sin 2B$，则$\triangle ABC$为（　　）.

（A）锐角三角形　　（B）直角三角形

（C）等腰三角形或直角三角形　　（D）等腰三角形

（3）$\triangle ABC$的两边长分别是 5 和 3，它们夹角的余弦是方程$5x^2 - 7x - 6 = 0$的根，三角形的另一边长为（　　）.

（A）52　　（B）$2\sqrt{13}$　　（C）16　　（D）4

3．解答题：

（1）在$\triangle ABC$中，$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$，求$\angle C$；

（2）已知平行四边形$ABCD$的对角线$AC = 16$，$BD = 20$，且它们所夹的锐角为60°，求这个四边形各边的长；

（3）在$\triangle ABC$中，$\sin A\sin B = \cos A\cos B$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【知识链接】

填空：

如图 12-2 所示，在直角坐标系中，$|OP| = r$，$\angle xOP = \alpha$，则点P的坐标为______________；在Ox上取一点A使$OA = a$，连接AP，则$\triangle AOP$的面积为______________.

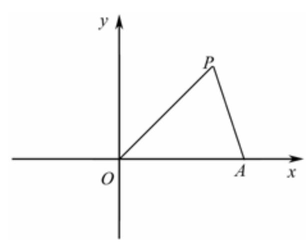


图 12-2

12.4.2　三角形的面积

【学习目标】

1．熟练掌握三角形面积公式；

2．培养学生合情推理探索数学规律的思维能力.

【学法指导】

1．已知两边及其夹角，使用公式可直接求出三角形的面积；

2．已知三边也可求出三角形的面积．计算方法是先由余弦定理算出一个角的余弦，然后再算出这个角的正弦，最后用公式计算出三角形的面积.

例题赏析

例 在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=60°$，$c=4$，$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$，求三角形其他两边的长.

解：由三角形面积公式得

$$\frac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{3},$$

解得

$$a=6;$$

由余弦定理得

$$\begin{aligned}b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\&=36+16-2\times6\times4\times\frac{1}{2}\\&=28,\end{aligned}$$

所以$b=2\sqrt{7}$.

点拨：此题主要考查三角形的面积公式、余弦定理两个方面的知识.

【同步训练 12.4.2】

A 组

1．填空题：

（1）在$\triangle ABC$中，已知$a=3$，$b=4$，$\angle B=90°$，则$S_{\triangle ABC}=$________；

（2）在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$b=6$，$\angle C=60°$，则$S_{\triangle ABC}=$________；

（3）在$\triangle ABC$中，已知$b=4$，$c=4\sqrt{2}$，$\angle A=105°$，则$S_{\triangle ABC}=$__________；

（4）在平行四边形$ABCD$中，已知$AB=4$，$BC=8$，$\angle ABC=60°$，则平行四边形$ABCD$的面积为________；

（5）在$\triangle ABC$中，若$a=4$，$c=2$，$S_{\triangle ABC}=4$，则$\cos B=$________.

2．选择题：

（1）在$\triangle ABC$中，$a=2$，$c=2\sqrt{2}$，$\angle B=105°$，则$S_{\triangle ABC}$等于（　　）.

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）$\sqrt{3}+1$　　（D）$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

（2）在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=\sqrt{7}$，$c=2$，则$S_{\triangle ABC}$等于（　　）.

（A）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）3　　（D）$3\sqrt{3}$

（3）在$\triangle ABC$中，$AC=20$，$S_{\triangle ABC}=160$，则边AB的最小值为（　　）.

（A）32　　（B）16　　（C）8　　（D）$16\sqrt{3}$

3．解答题：

（1）在$\triangle ABC$中，若$a=5$，$b=6$，当$\angle C$取何值时，$\triangle ABC$的面积最大，最大面积是多少？

（2）在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，求$\angle A$和$S_{\triangle ABC}$.

B　　组

1．在$\triangle ABC$中，若$S_{\triangle ABC}=40\sqrt{3}$，$BC=16$，$AC=10$，求$\cos C$的值.

2．在$\triangle ABC$中，若$a=3$，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【知识链接】

1．在$\triangle ABC$中，$BC=4$ cm，BC边上的高为 3 cm，$AC=6$ cm，则AC边上的高为______cm.

2．在$\triangle ABC$中，由$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$得：

$a\sin B=$_______，$b\sin C=$_______，$c\sin A=$____________.

12.4.3　正弦定理

【学习目标】

1．熟记正弦定理；
2．灵活运用正弦定理解三角形.

【学法指导】

应用正弦定理求解三角形的未知元素，主要有下面两种情形：
（1）已知两角和一边，求其他元素——有唯一解；
（2）已知两边和其中一边所对的角，求其他元素——一解、二解或无解．要求同学们能根据具体的问题判断解的情况.

例题赏析

例　在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$\angle B=30°$，求a.

解：由正弦定理，得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

即
$$\frac{3}{\sin 30°}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin C},$$

所以
$$\sin C=\frac{3\sqrt{3}\sin 30°}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $c>b$，所以$\angle C=60^\circ$或$\angle C=120^\circ$．

当$\angle C=60^\circ$时，$\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$，

则 $a^2=b^2+c^2=9+27=36$，$a=6$；

当$\angle C=120^\circ$时，$\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ$，

则$\angle A=\angle B$，$a=b=3$．

点拨：凡已知两边和其中一边的对角解三角形时，一定要注意解的情况，在得出 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$以后，应考虑在 0° 到 180° 之间正弦值等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$的角 C 有两个，一个是锐角，一个是钝角，是否两个角都符合要求，还要根据“三角形大边对大角”来判断.

想一想：直接应用余弦定理求 a 行吗？不妨试一试.

【同步训练 12.4.3】

A 组

1．填空题：

（1）在$\triangle ABC$中，$a=10\sqrt{3}$，$b=10$，$\angle A=60^\circ$，则$\angle B=$_______；

（2）在$\triangle ABC$中，$b=2$，$\angle C=45^\circ$，$\angle A=60^\circ$，则此三角形的最小边长为_______；

（3）在$\triangle ABC$中，$b=8$，$c=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，$\angle B=60^\circ$，则最大边等于_______.

2．选择题：

（1）在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$\angle A=\frac{\pi}{4}$，则$\angle B$等于（　　）.

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

（2）在$\triangle ABC$中，$a=10$，$b=5\sqrt{6}$，$\angle A=\frac{\pi}{4}$，则$\triangle ABC$的解的个数为（　　）.

（A）一解　　（B）两解　　（C）无解　　（D）无法确定

（3）若 $BC=2$，$AC=6$，$\angle BAC=30^\circ$，则 A、B、C 三点构成的三角形的个数为（　　）.

（A）一个　　（B）两个　　（C）无　　（D）无法确定

（4）在$\triangle ABC$中，$b=2$，$c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\angle B=60^\circ$，则$\angle C$等于（　　）.

（A）45° 或 135°　　（B）45°　　（C）135°　　（D）无解

3．解答题：

（1）在$\triangle ABC$中，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$，$AB=8$，求 AC.

（2）在$\triangle ABC$中，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，$a=50$，$b=50\sqrt{2}$，求$\angle B$.

B 组

1．选择题：

（1）已知在$\triangle ABC$中，$A{:}B{:}C=1{:}2{:}3$，则 $a{:}b{:}c$ 等于（　　）.

（A）$1:\sqrt{3}:2$　（B）$2:\sqrt{3}:1$　（C）$1:2:3$　（D）$3:2:1$

（2）在△ABC 中，$a=2$，$\angle A=30°$，$\angle C=45°$，则 b 等于（　　）.

（A）$\sqrt{6}-\sqrt{2}$　（B）$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　（C）$2\sqrt{2}$　（D）$2\sqrt{6}$

（3）在△ABC 中，已知 $A=2B$，那么 a 等于（　　）.

（A）$2b\sin A$　（B）$2b\cos A$　（C）$2b\sin B$　（D）$2b\cos B$

2．在△ABC 中，若 $a=2b\cos C$，试判断△ABC 的形状.

12.5　三角计算及应用举例

【学习目标】

初步掌握三角公式在电工学、力学、测量学和工程建筑学等学科的具体应用.

【学法指导】

利用三角公式解决实际应用问题，首先是将实际问题转化为三角问题，然后选择适当的三角公式解之.

例题赏析

例　已知三个电流瞬时值的函数表达式分别是：$I_1=5\sin\omega t$，$I_2=6\sin(\omega t-60°)$，$I_2=10\sin(\omega t+60°)$，求它们合成后的电流瞬时值 $I=I_1+I_2+I_3$ 的函数式.

解：
$$\begin{aligned}I&=I_1+I_2+I_3\\&=5\sin\omega t+6\sin(\omega t-60°)+10\sin(\omega t+60°)\\&=5\sin\omega t+6(\sin\omega t\cos 60°-\cos\omega t\sin 60°)+\\&\quad 10(\sin\omega t\cos 60°+\cos\omega t\sin 60°)\\&=5\sin\omega t+8\sin\omega t+2\sqrt{3}\cos\omega t\\&=13\sin\omega t+2\sqrt{3}\cos\omega t\\&=\sqrt{13^2+(2\sqrt{3})^2}\sin(\omega t+\theta)\\&=\sqrt{181}\sin(\omega t+\theta),\end{aligned}$$

其中，θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{13}{\sqrt{181}}$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{181}}$，查表或利用计算器求得 $\theta\approx 14°55'$.

所以 $I=\sqrt{181}\sin(\omega t+14°55')$.

【同步训练 12.5】

A　组

1．填空题：

（1）在△ABC 中，$b=3$，$c=5$，$\angle A=60°$，则 $a=$______；其面积 $S=$______；

（2）函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ 的最大值是______，最小值时______，周期是______.

2．选择题：

（1）函数 $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ 是（　　）.

（A）最小正周期为 π 的奇函数

（B）最小正周期为 π 的偶函数

（C）最小正周期为 2π 的奇函数

（D）最小正周期 2π 的奇函数

（2）函数 $y=(\sin x+\cos x)^2$ 的最大值和最小正周期分别是（　　）.

（A）4，2π　　（B）2，2π　　（C）4，π　　（D）2，π

（3）函数 $y=3\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{5})$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{3}$，则正数 ω 等于（　　）.

（A）3　　（B）6　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

（4）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$x\in\mathbf{R})$ 的部分图像如图 12-3 所示，则函数的表达式为（　　）.

（A）$y=4\sin(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4})$

（B）$y=4\sin(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4})$

（C）$y=4\sin(\dfrac{1}{8}x+\dfrac{\pi}{4})$

（D）$y=4\sin(\dfrac{1}{8}x-\dfrac{\pi}{4})$

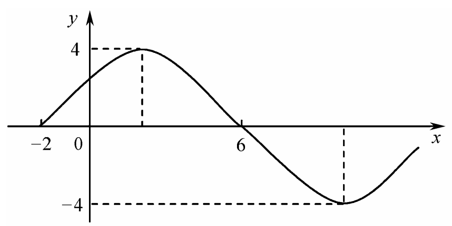


图 12-3

3．已知三个电流瞬时值的函数表达式分别是：$I_1=4\sin\omega t$，$I_2=6\sin(\omega t-60°)$，$I_3=8\sin(\omega t+60°)$，求合成的电流正弦波 $I=I_1+I_2+I_3$ 的函数表达式.

B　组

1．如图 12-4，设 A,B 两点在河流的两岸，测量者在与点 A 同侧的河岸边选取测量点 C，测得 $AC=50\text{m}$，$\angle BAC=51°$，$\angle ACB=75°$，求 A,B 两点间的距离.

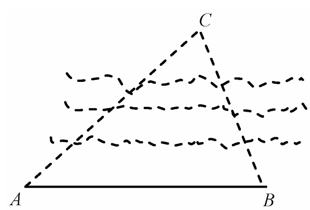


图 12-4

2．已知函数 $f(x)=2\cos x\sin(x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x$ $(x\in\mathbf{R})$.

（1）求函数的最大值、最小值和周期；

（2）求使函数取得最大值和最小值的 x 的集合．

综合练习 12

一、选择题：

1．在△ABC 中，$\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B<0$，则△$ABC$（　　）．

（A）钝角三角形　　（B）锐角三角形

（C）直角三角形　　（D）不确定

2．函数 $y=\sqrt{10}\sin 3x\cos 3x$ 是（　　）．

（A）周期为$\frac{2\pi}{3}$的奇函数　　（B）周期为$\frac{2\pi}{3}$的偶函数

（C）周期为$\frac{\pi}{3}$的奇函数　　（D）周期为$\frac{\pi}{3}$的偶函数

3．在△ABC 中，$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，则 $\sin C$ 等于（　　）．

（A）$\frac{56}{65}$　　（B）$\frac{33}{65}$　　（C）$-\frac{56}{65}$　　（D）$-\frac{33}{65}$

4．已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，且$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则 $\tan 2\alpha$ 等于（　　）．

（A）$-4\sqrt{5}$　　（B）$-\frac{\sqrt{5}}{7}$　　（C）$\frac{5}{7}$　　（D）$4\sqrt{5}$

5．函数 $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$（　　）．

（A）是奇函数　　（B）是偶函数

（C）既是奇函数且是偶函数　　（D）非奇非偶函数

6．在△ABC 中，若 $a:b:c=2\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$，则△$ABC$ 为（　　）．

（A）直角三角形　　（B）锐角三角形

（C）钝角三角形　　（D）等腰直角三角形

7．在△ABC 中，已知$\angle A=30°$，$a=8$，$b=8\sqrt{3}$，则 $S_{\triangle ABC}$ 等于（　　）．

（A）$32\sqrt{3}$　　（B）16

（C）$32\sqrt{3}$或 16　　（D）$32\sqrt{3}$或 $16\sqrt{3}$

8．若 $2\sin B\cos C=\sin A$，则△ABC 为（　　）．

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形

（C）等边三角形　　（D）等腰直角三角形

9．在△ABC 中，$a=5$，$b=7$，$\angle A=45°$，则△ABC 的解的个数为（　　）．

（A）一解　　（B）两解　　（C）无解　　（D）无法确定

10．在△ABC 中，$a=7$，$b=4\sqrt{3}$，$c=\sqrt{13}$，则△ABC 最小角的大小为（　　）．

（A）$\frac{\pi}{3}$　　（B）$\frac{\pi}{12}$　　（C）$\frac{\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{4}$

二、填空题：

1．$\sin 37.5°\cos 7.5°-\cos 37.5°\sin 7.5°=$_______；

2．$\sin 37^\circ \sin 23^\circ - \cos 37^\circ \cos 23^\circ =$ ______；

3．$\sin 32^\circ \cos 13^\circ + \sin 58^\circ \cos 77^\circ =$ ______；

4．$(1+\tan 10^\circ)(1+\tan 35^\circ)=$ _______；

5．函数 $y=\cos 2x+2\sin x\cos x$ 的最大值为_______，最小值为_______；

6．$\sqrt{\dfrac{1+\cos 60^\circ}{2}}=$ _______，$2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1=$ _______，$1-2\cos^2\dfrac{7\pi}{12}=$ _______；

7．已知 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，则 $\tan 2\alpha=$ _______；

8．若$\triangle ABC$ 三边之比为 4∶5∶8，则其最大角的余弦为_______；

9．在$\triangle ABC$ 中，$b=4$，$\angle A=60^\circ$，$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，则 $a=$ _______，$c=$ _______；

10．在$\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=7$，$|\overrightarrow{CA}|=3$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ _______；

11．已知 $\sin A:\sin B:\sin C=6:5:4$，则 $\cos A=$ _______.

三、解答题：

1．已知点 $P(3，-4)$在角α的终边上，点 $Q(2，1)$在角β的终边上.

求：$\cos(\alpha+\beta)$、$\sin(\alpha-\beta)$、$\tan(\alpha+\beta)$.

2．求函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$ 的最小值，并写出使函数 $f(x)$取得最小值时 x 的集合.

3．已知：$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\alpha-\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\alpha+\beta\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$，求：$\sin2\alpha$.

4．在$\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}+1$，$\angle B=45^\circ$，求$\angle A$，$\angle C$，b.

5．在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，求$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$的值.

6．求函数 $y=\cos 2x-\sin^2 x+3\sin x$ 的最小值，并写出使函数 y 取得最小值时 x 的集合.

7．如图 12-5 所示，在等腰$\triangle ABC$ 中，D 为 CA 的延长线上一点，且 $BD\perp CA$ 于 D 点，$BD=4$，高 BD 与底边 BC 的夹角为 60°，求$\triangle ABC$ 的面积.

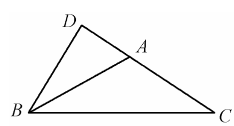


图 12-5

思想火花

　　但愿每次回忆，对生活都不感到负疚.

第 13 章　圆 锥 曲 线

13.1　椭　　圆

13.1.1　椭圆的标准方程

【学习目标】

掌握椭圆的定义；掌握椭圆的标准方程；会根据椭圆的定义求椭圆的标准方程.

【学法指导】

1．学习椭圆定义时，要注意条件“常数大于$|F_1F_2|$”.

2．要注意两种标准方程与椭圆两种位置的对应关系，明确焦点的位置是准确把握这两种对应关系的有效方法.

例题赏析

例　已知曲线方程$\dfrac{x^2}{k-4}+\dfrac{y^2}{6-k}=1$.

（1）当k为何值时，表示圆；

（2）当k为何值时，表示椭圆；

（3）当k为何值时，表示焦点在x轴上的椭圆.

分析：曲线方程中x^2、y^2的系数的大小及符号是区分曲线形状及位置的依据.

解：（1）由圆的标准方程可知，当

$$\begin{cases}k-4>0\\6-k>0\\k-4=6-k\end{cases}$$

时方程表示圆，解得：$k=5$；

（2）由椭圆的标准方程知，当

$$\begin{cases}k-4>0\\6-k>0\\k-4\neq 6-k\end{cases}$$

时方程表示椭圆，解得：$4<k<6$，且$k\neq 5$；

（3）当

$$\begin{cases}k-4>0\\6-k>0\\k-4>6-k\end{cases}$$

时方程表示焦点在 x 轴上的椭圆，解得：$5<k<6$.

易错易混问题剖析

在求椭圆的标准方程时，如果椭圆的位置不能确定，就应按焦点在 x 轴和 y 轴上两种情况分别求解，既不能增解也不能漏解.

【同步训练 13.1.1】

A　组

1．选择题：

（1）设 F_1，F_2 为定点，$|F_1F_2|=6$，动点 M 满足$|MF_1|+|MF_2|=8$，则动点 M 的轨迹是（　　）.

（A）椭圆　　（B）直线　　（C）圆　　（D）线段

（2）椭圆 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到一个焦点的距离等于 4，则它到另一个焦点的距离为（　　）.

（A）5　　（B）7　　（C）8　　（D）10

（3）已知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，那么它的焦距是（　　）.

（A）10　　（B）5　　（C）$\sqrt{7}$　　（D）$2\sqrt{7}$

（4）如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，那么实数 k 的取值范围是（　　）.

（A）$k>0$　　（B）$k>1$　　（C）$0<k<1$　　（D）$0<k<2$

2．填空题：

（1）椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的焦点为__________，__________，焦距是__________；

（2）椭圆 $16x^2+9y^2=144$ 的焦点为________，________，焦距是________；

（3）椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，F_1、F_2 为其焦点，P 为椭圆上任一点，则$\triangle PF_1F_2$ 周长为__________.

3．求 $a=6$，焦点为 $F_1(-4, 0)$，$F_2(4, 0)$的椭圆标准方程.

4．已知椭圆的焦点在 x 轴上，$a=6$，经过点 $A(2, -4)$，求椭圆的标准方程.

B　组

1．选择题：

（1）如果方程 $x^2\sin\alpha+y^2\cos\alpha=1$ 是椭圆的方程，那么角 α 是（　　）.

（A）第一象限的角　　（B）第二象限的角

（C）第三象限的角　　（D）第四象限的角

（2）若方程 $\dfrac{x^2}{2m+1}+\dfrac{y^2}{3m}=1$ 表示椭圆，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$m>0$　　（B）$m>1$

（C）$m=1$　　（D）$m>0$ 且 $m\neq 1$

（3）已知过椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左焦点 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点，则△ABF_2 的周长是（　　）.

（A）10　　（B）20　　（C）16　　（D）8

（4）过椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左焦点 F_1 的直线与椭圆交于 A、B 两点，且 $|AB|=6$，F_2 是右焦点，则 $|AF_2|+|BF_2|=$（　　）.

（A）10　　（B）14　　（C）20　　（D）16

（5）椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标为（　　）.

（A）$(\pm 2, 0)$　　（B）$(\pm 1, 0)$　　（C）$(0, \pm 1)$　　（D）$(0, \pm 2)$

（6）若椭圆满足 $a=4$，焦点为 $(0, -3)$，$(0, 3)$，则椭圆方程为（　　）.

（A）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

（C）$\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{7}=1$　　（D）$\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{9}=1$

2．填空题：

（1）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{49}=1$ 上的一点到左焦点的距离为 6，则该点到右焦点的距离等于______；

（2）椭圆 $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点 P 到两焦点的距离和为__________；

（3）椭圆 $3x^2+2y^2=1$ 的焦点的坐标是__________________；

（4）若 P 是椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上一点，则△PF_1F_2 的周长为____________.

3．已知椭圆上一点到两焦点 $F_1(-2, 0)$、$F_2(2, 0)$ 的距离之和等于 8，求椭圆的标准方程.

4．已知椭圆的中心在原点，且经过两点 $P_1(\sqrt{6}, 1)$、$P_2(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$，求椭圆的标准方程.

5．过椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的左焦点 F_1，斜率为 1 的直线与椭圆交于 A、B 两点，如图 13-1 所示.

（1）求 A、B 两点的坐标；

（2）求△ABF_2 的面积.

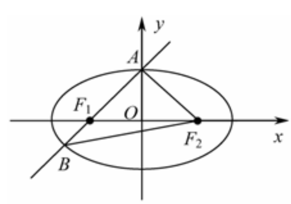


图 13-1

【知识链接】

1．点 (x, y) 关于 x 轴的对称点坐标是__________；关于 y 轴的

对称点坐标是__________；关于原点的对称点的坐标是___________.

2．曲线 $x^2+2xy+y^2-4=0$ 与 x 轴的交点坐标是________________；与 y 轴的交点坐标是_________________.

13.1.2　椭圆的几何性质

【学习目标】

1．熟练掌握椭圆的几何性质.

2．掌握 a，b，c，e 的几何意义，并理清它们之间的关系.

3．能利用椭圆的几何性质解题.

【学法指导】

在学习本节内容时，不应怕麻烦，要通过画图弄清 a, b, c 的几何意义，掌握其相互关系，必将取得事半功倍的效果.

例题赏析

例　已知点 $P(3, 4)$是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上的一点，$F_1$、$F_2$ 为椭圆的两焦点，若 $PF_1\perp PF_2$，试求：（1）椭圆的方程；（2）$\triangle PF_1F_2$ 的面积.

分析：垂直的问题可以转化为向量的内积等于 0.

解：（1）设 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，则 $b^2=a^2-c^2$.

所以 $\overrightarrow{PF_1}=(-c-3, -4)$，$\overrightarrow{PF_2}=(c-3, -4)$，

因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，

即$(-c-3, -4)\,(c-3, -4)=0$，

解得：$c=5$.

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-25}=1$.

又因为点 $P(3, 4)$在椭圆上，

则 $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{a^2-25}=1$，解得 $a^2=45$ 或 $a^2=5$.

又 $a>c$，所以 $a^2=5$ 舍去.

故所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1.$$

（2）P 点的纵坐标的绝对值是 F_1F_2 边上的高，所以

$$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\left|F_1F_2\right|\times 4=\frac{1}{2}\times 10\times 4=20.$$

【同步训练 13.1.2】

A　组

1．选择题：

（1）椭圆 $25x^2+16y^2=400$ 的离心率为（　　）.

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{2}{5}$　　（C）$\frac{3}{5}$　　（D）$\frac{4}{5}$

（2）椭圆两焦点为 $F_1(-1,\ 0)$、$F_2(1,\ 0)$，P 在椭圆上，且$|PF_1|$、$|F_1F_2|$、$|PF_2|$构成等差数列，则此椭圆的标准方程为（　　）.

（A）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　（B）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

（C）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　（D）$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

（3）一椭圆的长轴是短轴的 2 倍，则其离心率为（　　）.

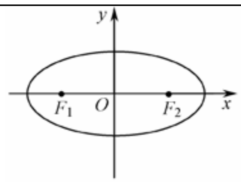
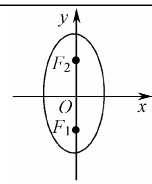
（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{1}{2}$

（4）椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是$(0, 2)$，那么 k 的值为（　　）.

（A）-1　　（B）1　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$-\sqrt{5}$

2．填写 13-1．

表 13-1

标准方程		
图形		
对称性	关于___轴、___轴成轴对称，关于________成中心对称	
焦点		
焦距	$2c$	$2c$
顶点		
长轴长	$2a$	$2a$
短轴长	$2b$	$2b$
a、b、c 关系		
离心率	$e=\frac{c}{a}$；e 越大，椭圆越_____，e 越小，椭圆越________	

3．已知椭圆 $x^2+4y^2=16$，求椭圆的顶点坐标、长轴长、短轴长、离心率及焦点坐标.

B　组

1．选择题：

（1）椭圆一个焦点与两短轴端点的连线的夹角为 60°，则它的离心率为（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\sqrt{2}$

（2）椭圆 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$ 在 y 轴上的顶点坐标为（　　）.

（A）$(\pm2, 0)$　　（B）$(\pm4, 0)$　　（C）$(0, \pm4)$　　（D）$(0, \pm2)$

（3）椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 与 x 轴正半轴交于 A，与 y 轴正半轴交于 B，则 A、B 的距离为（　　）.

（A）5　　（B）$\sqrt{7}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）4

（4）椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点 M 到焦点 F_1 的距离为 2，A 是 MF_1 的中点，则 $|OA|$ 等于（　　）.

（A）2　　（B）4　　（C）8　　（D）$\frac{3}{2}$

（5）方程 $\frac{x^2}{2+k}+\frac{y^2}{4+k}=1$，表示椭圆的焦点在 y 轴上的条件是（　　）.

（A）$k>-4$　　（B）$-4<k<-2$

（C）$k>-2$　　（D）$k<-2$

（6）点 $M(2\cos\alpha,\ \sqrt{3}\sin\alpha)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的位置关系为（　　）.

（A）在椭圆内　　（B）在椭圆上

（C）在椭圆外　　（D）无法确定

2．填空题：

（1）椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦距为 2，则 m 的值为________；

（2）已知方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示椭圆，则 α 是第________象限角；

（3）如果椭圆的两焦点恰好是长轴的三等分点时，椭圆的离心率为_________；

（4）椭圆经过两点 $P(-4, 0)$，$Q(0, 3)$，则椭圆的标准方程为___________.

3．已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 上的点，F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

【知识链接】

1．若方程 $\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{k-4}=1$ 表示椭圆，求 k 的取值范围.

2．已知直线 l：$y=2x+m$ 与椭圆 c：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，求 m 为何值时，l 与 c 有两个交点、一个交点、无交点？

13.2　双　曲　线

13.2.1　双曲线的标准方程

【学习目标】

掌握双曲线的定义；掌握双曲线的标准方程，会根据双曲线的定义求双曲线的标准方程.

【学法指导】

1．学习双曲线定义时，要注意条件“常数小于$|F_1F_2|$且不等于零”、“绝对值”.

2．要注意两种标准方程与双曲线两种位置的对应关系，明确焦点的位置是准确把握这两种对应关系的有效方法.

例题赏析

例 1　当α从 0° 到 180° 变化时，曲线 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 怎样变化？

分析：当角α从 0° 到 180° 变化时，$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$，方程表示着不同的曲线.

解：（1）当$\alpha=0^\circ$ 时，$\cos\alpha=1$，方程为 $x^2+y^2=1$，表示圆；

当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，$\cos\alpha>0$，方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=1$，表示焦点在 y 轴上的椭圆；

当$\alpha=90^\circ$ 时，$\cos\alpha=0$，方程为 $x^2=1$，即 $x=1$ 或 $x=-1$，表示两条与 y 轴平行的直线；

当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，$\cos\alpha<0$，方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=1$，表示焦点在 x 轴上的双曲线；

当$\alpha=180^\circ$ 时，$\cos\alpha=-1$，方程为 $x^2-y^2=1$，表示焦点在 x 轴上的等轴双曲线.

点拨：该题在解答时，要充分讨论角α的变化情况，对于角α的不同取值，方程对应不同的曲线．本题蕴含了分类讨论的数学思想，在进行分类讨论时，要做到不重不漏.

例 2　已知双曲线$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$的焦点为 F_1、F_2，P 是双曲线上一动点.

（1）当 $\angle F_1PF_2$ 为直角时，求点 P 的坐标；

（2）当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，写出点 P 的横坐标的取值范围.

解：（1）设动点 $P(x,y)$，由双曲线方程$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$得：

$$a^2=6,\ b^2=3,\ c^2=a^2+b^2=9,$$

所以 $c=3$，因此焦点 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，

所以 $\overrightarrow{F_1P}=(x+3,y)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x-3,y)$，

因为$\angle F_1PF_2=90^\circ$，

所以 $\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_2P}\Leftrightarrow\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，

即$(x+3,y)\,(x-3,y)=0$，

所以 $x^2+y^2=9$，

由$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=-1\end{cases}$.

所以 P 点的坐标为$(2\sqrt{2},1)$或$(2\sqrt{2},-1)$或$(-2\sqrt{2},1)$或$(-2\sqrt{2},-1)$.

（2）当$\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 的横坐标的取值范围为 $(-2\sqrt{2},-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},2\sqrt{2})$.

易错易混问题剖析

受椭圆知识学习的影响，双曲线中 a, b, c 的关系与椭圆中 a, b, c 的关系易混淆，所以应分清它们之间的关系.

【同步训练 13.2.1】

A　　组

1．选择题：

（1）双曲线 $x^2-4y^2=4$ 的顶点坐标是（　　）.

（A）$(-2, 0)$，$(2, 0)$　　（B）$(0, -2)$，$(0, 2)$

（C）$(-1, 0)$，$(1, 0)$　　（D）$(0, -1)$，$(0, 1)$

（2）已知两点 $F_1(-5, 0)$，$F_2(5, 0)$，与它们的距离的差的绝对值等于 6 的点的轨迹方程为（　　）.

（A）$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　　（D）$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

（3）已知双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$，那么它的焦距为（　　）.

（A）10　　（B）5　　（C）$-\sqrt{15}$　　（D）$2\sqrt{15}$

（4）双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标为（　　）.

（A）$(\pm4, 0)$　　（B）$(\pm3, 0)$　　（C）$(\pm5, 0)$　　（D）$(\pm\sqrt{7}, 0)$

2．已知动点 P 到两定点 $F_1(-3, 0)$、$F_2(3, 0)$的距离差的绝对值是 4，求点 P 的轨迹方程.

B　　组

1．选择题：

（1）若 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，则曲线 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示（　　）.

（A）椭圆　　（B）圆　　（C）双曲线　　（D）抛物线

（2）方程 $\dfrac{x^2}{k+2}-\dfrac{y^2}{k+1}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线，则 k 的取值范围是（　　）.

（A）$k>1$　　（B）$k<-1$　　（C）$k<2$　　（D）$k<-2$

（3）双曲线 $x^2-y^2=-4$ 的焦点坐标为（　　）.

（A）$(-2\sqrt{2}, 0)$，$(2\sqrt{2}, 0)$）　　（B）$(0, -2\sqrt{2})$，$(0, 2\sqrt{2})$

（C）$(-\sqrt{2}, 0)$，$(\sqrt{2}, 0)$　　（D）$(0, -\sqrt{2})$，$(0, \sqrt{2})$

2．填空题：

（1）如图 13-2 所示，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 右支上一点 M 到左焦

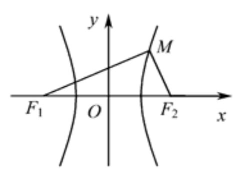


图 13-2

点 F_1 的距离为 12，则 M 到右焦点 F_2 的距离为__________；

（2）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点 F_1、F_2 和 $P(0, 1)$，则$\triangle PF_1F_2$ 的面积为____.

3．已知直线 $y=x+m$ 与双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 相交于 A、B 两点，且有 $OA\perp OB$，求 m 的值.

4．设 F_1 和 F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上且满足$\angle F_1PF_2=90^\circ$，求$\triangle F_1PF_2$ 的面积.

【知识链接】

1．如果双曲线 $x^2\sin\alpha+y^2\cos\alpha=1$ 的焦点在 y 轴上，求角 α 所在的象限.

2．求与两点 $F_1(-3, 0)$，$F_2(3, 0)$的距离的差的绝对值等于 4 的点的轨迹方程.

13.2.2　双曲线的几何性质

【学习目标】

1．熟练掌握双曲线的几何性质.
2．掌握 a，b，c，e 的几何意义，并理清它们之间的关系.
3．能利用双曲线的几何性质解题.

【学法指导】

在学习本节内容时，不可死记硬背，在学习中要注意把“形”与“数”结合起来，以达到事半功倍的效果.

例题赏析

例 1　已知双曲线的中心在原点，焦点 F_1、F_2 在坐标轴上，离心率 $e=\sqrt{2}$，且过点$(2, -\sqrt{2})$.

（1）求双曲线方程；

（2）若第一象限的点 M 在双曲线的渐近线上，且 $MF_1\perp MF_2$，求点 M 的坐标；

（3）求$\triangle MF_1F_2$ 的面积.

解：（1）因为双曲线的离心率为$\sqrt{2}$，所以双曲线为等轴双曲线；

设双曲线方程为：$x^2-y^2=\lambda$，

又因为双曲线经过点$(2,-\sqrt{2})$，所以$\lambda=4-2=2$，

所以双曲线方程为：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）不妨设 $F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$，

又因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$，且点 M 在第一象限，

所以设 M 的坐标为(n, n)，又因为 $MF_1\perp MF_2$，

所以 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=(n-2, n)\cdot(n+2, n)=n^2-4+n^2=0$，

所以 $n=\sqrt{2}$，即 $M(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（3）$S_{\triangle MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot n=2\sqrt{2}$.

例 2 已知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{3}x$，经过点 $M(9, 1)$，求双曲线的标准方程.

分析：此题的常规解法要假设焦点在 x 轴、焦点在 y 轴两种情况进行讨论求解，计算量较大. 在此我们从渐近线方程入手，利用待定系数法求解.

解：由双曲线的渐近线方程 $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ 得 $y^2=\dfrac{x^2}{9}$，

设所求双曲线的方程为 $y^2-\dfrac{x^2}{9}=k$，

又因为双曲线经过点 $M(9, 1)$，

所以有 $1^2-\dfrac{9^2}{9}=k$，

所以 $k=-8$，

所求双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{72}-\dfrac{y^2}{8}=1$.

【同步训练 13.2.2】

A 组

1．选择题：

（1）双曲线的实轴长为 $4\sqrt{5}$，焦点在 y 轴上，且经过点 $A(2, -5)$，则双曲线的标准方程是（　　）.

（A）$\dfrac{y^2}{20}-\dfrac{x^2}{16}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$

（C）$\dfrac{y^2}{20}-\dfrac{x^2}{20}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{20}=1$

（2）双曲线 $9x^2-16y^2=144$ 的离心率为（　　）.

（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$\dfrac{5}{3}$　　（D）$\dfrac{5}{4}$

（3）双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的渐近线方程是（　　）.

（A）$y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　（B）$y=\pm\dfrac{3}{4}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{16}{9}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{9}{16}x$

（4）双曲线$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$的离心率为（　　）.

（A）$\dfrac{5}{4}$　　（B）$\dfrac{5}{3}$　　（C）$\dfrac{9}{4}$　　（D）$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2．填空题：

（1）若双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，则双曲线的焦点坐标为__________、____________；

（2）等轴双曲线经过点$(-5, 3)$，则其标准方程为________________________.

3．填写表 13-2.

表 13-2

标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）
图形		
对称性	关于____轴、____轴成轴对称，关于_________成中心对称	
焦点		
焦距		
顶点		
实轴长		
虚轴长		
渐近线方程		
a、b、c 关系		
离心率	$e=\dfrac{c}{a}$；e 越大，双曲线开口越________	

4．求双曲线$5x^2-4y^2=20$的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、离心率、渐近线方程和顶点坐标.

B　组

1．选择题：

（1）若双曲线的渐近线方程为$y=\pm x$，则它的离心率为（　　）.

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）不存在

（2）双曲线$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{5}=1$的顶点坐标为（　　）.

（A）$(\pm3, 0)$　　（B）$(0, \pm\sqrt{5})$　　（C）$(\pm\sqrt{5}, 0)$　　（D）$(0, \pm3)$

（3）双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为（　　）.

（A）$y=\pm\dfrac{3}{2}x$　　（B）$y=\pm\dfrac{2}{3}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{4}{9}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{9}{4}x$

（4）双曲线 $9y^2-16x^2=144$ 的虚轴长为（　　）.

（A）3　　（B）6　　（C）4　　（D）8

2．填空题：

（1）过点 $P(2, 3)$的等轴双曲线的标准方程为________________；

（2）若 $x^2\tan\alpha+y^2\sin\alpha=1$ 表示双曲线，则α所在的象限为________________.

3．求与椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 有公共焦点，且离心率为 $\dfrac{4}{3}$ 的双曲线方程.

4．求双曲线 $9x^2-16y^2=144$ 被点$(8, 3)$平分的弦 AB 所在的直线方程.

【知识链接】

1．等轴双曲线的离心率 $e=$__________，渐近线方程是____________，两条渐近线的夹角是____________.

2．二次函数 $y=8x^2$ 的开口方向是____________，顶点坐标是______________，对称轴方程是________________.

13.3　抛　物　线

13.3.1　抛物线的标准方程

【学习目标】

掌握抛物线的定义；掌握抛物线的标准方程，会根据已知条件求抛物线的标准方程.

【学法指导】

1．学习抛物线定义时，要注意“到定点与到定直线的距离相等”这一条件.

2．应注意区分抛物线的四种标准方程，要注意四种标准方程与抛物线四种位置的对应关系.

例题赏析

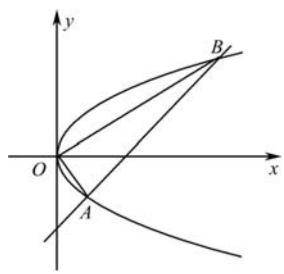


图 13-3

例　如图 13-3 所示，直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于点 A、B，求证：$OA\perp OB$.

证法一：设直线和抛物线的两个交点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

将 $y=x-2$ 代入 $y^2=2x$ 中，得 $(x-2)^2=2x$，化简得 $x^2-6x+4=0$，

所以 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=4$，

$y_1y_2=(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=4-2\times6+4=-4$

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=4+(-4)=0$.

所以 $OA\perp OB$.

证法二：

将 $y=x-2$ 代入 $y^2=2x$ 中，得$(x-2)^2=2x$.

化简得 $x^2-6x+4=0$，

解得　$x_1=3+\sqrt{5}$，$x_2=3-\sqrt{5}$，

则　$y_1=1+\sqrt{5}$，$y_2=1-\sqrt{5}$，

因为$\overrightarrow{OA}=(3-\sqrt{5},1-\sqrt{5})$，$\overrightarrow{OB}=(3+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$，

所以　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(3-\sqrt{5},1-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$

$=(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})$

$=9-5+1-5$

$=0$，

所以$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故 $OA\perp OB$.

【同步训练 13.3.1】

A　组

1．选择题：

（1）抛物线 $y=-\dfrac{1}{8}x^2$ 的准线方程是（　　）.

（A）$x=\dfrac{1}{32}$　（B）$x=\dfrac{1}{2}$　（C）$y=2$　（D）$y=4$

（2）抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点坐标为（　　）.

（A）(1, 0)　（B）(–1, 0)　（C）(0, 1)　（D）(0, –1)

（3）抛物线 $y^2-4x=0$ 上一点到准线距离为 8，则该点的横坐标是（　　）.

（A）7　（B）6　（C）–7　（D）–6

2．填空题：

（1）抛物线 $y^2=8x$ 关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程是______________；

（2）已知抛物线的准线方程为 $x=-1$，则抛物线的标准方程为___________；

（3）抛物线 $y^2=8x$ 上一点 A 到 y 轴的距离为 12，则点 A 到准线的距离为_____.

3．过抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的焦点且倾斜角为 60° 的直线与该抛物线的两个交点为 A、B，求 A、B 两点间的距离.

B　组

1．选择题：

（1）已知曲线方程为 $x^2+y=0$，则该曲线的焦点坐标为（　　）.

（A）$(0,-\dfrac{1}{4})$　（B）$(-\dfrac{1}{4},0)$　（C）$(0,\dfrac{1}{4})$　（D）$(\dfrac{1}{4},0)$

（2）已知抛物线的准线方程为 $y=-1$，则抛物线的标准方程为（　　）.

（A）$y^2=4x$　（B）$y^2=-4x$　（C）$x^2=4y$　（D）$x^2=-4y$

（3）抛物线 $x^2=-12y$ 的开口方向和焦点坐标是（　　）.

（A）向左，$F(-3, 0)$　　（B）向右，$F(3, 0)$

（C）向上，$F(0, 3)$　　（D）向下，$F(0, -3)$

（4）抛物线 $x^2=4ay$（$a>0$）的准线方程为（　　）.

（A）$x=-a$　　（B）$x=a$　　（C）$y=-a$　　（D）$y=a$

2．填空题：

（1）抛物线 $y^2=4x$ 上的点 $P(3, y_0)$到抛物线焦点 F 的距离等于__________；

（2）抛物线 $y^2=-4x$ 上一点 N 到焦点的距离为 8，则该点的横坐标为_______；

（3）抛物线的准线方程为 $x=\dfrac{1}{2}$，则其标准方程为_______________.

3．抛物线 $y^2=-16x$ 上一点 M 到焦点的距离等于 8，求点 M 的坐标.

【知识链接】

1．经过点 $P(1, 2)$的抛物线的标准方程为______________.

2．若抛物线的焦点为 $F(3, 0)$，则抛物线的标准方程为______________.

3．若抛物线的准线方程为 $y=4$，则抛物线的标准方程为______________.

13.3.2　抛物线的几何性质

【学习目标】

1．熟练掌握抛物线的几何性质.

2．能利用抛物线的几何性质解题.

【学法指导】

在学习本节内容时，不可死记硬背，在学习中要注意把“形”与“数”结合起来，以达到事半功倍的效果.

例题赏析

例 1　求抛物线 $x^2=y$ 上到直线 $y=2x-4$ 的距离最小的点的坐标，并求出这个距离.

分析：此题在求解过程中，我们可以设抛物线上的一点 $P(x_0, y_0)$，然后利用点到直线的距离公式，应用代数中的求最值的方法求解.

解：设 $P(x_0, y_0)$是抛物线上任一点，所以有 $y_0=x_0^2$，

又因为 P 到直线 $y=2x-4$ 的距离为 $d=\dfrac{|2x_0-y_0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，

所以 $d=\dfrac{|2x_0-x_0{}^2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|(x_0-1)^2+3|}{\sqrt{5}}$，

当 $x_0=1$，即 $P(1, 1)$时，距离最小值为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

例 2　若曲线 $y=x^2$ 与 $y=2x^2-5x+m$ 的两个交点 A、B 间的距离为 13，求 m 的值.

解：设两条曲线的两个交点坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程组

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x^2-5x+m \end{cases},$$

消去 y 得：$x^2-5x+m=0$，则 $x_1+x_2=5$，$x_1x_2=m$，所以 $y_2-y_1=x_2^2-x_1^2$，

所以 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2}$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2\left[1+(x_2+x_1)^2\right]}=\sqrt{26(x_2^2-2x_2x_1+x_1^2)}$$

$$=\sqrt{26\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{26(25-4m)},$$

由题意得：$\sqrt{26(25-4m)}=13$，

解得：$m=\dfrac{37}{8}$.

【同步训练 13.3.2】

A　组

1．选择题：

（1）顶点在坐标原点，关于 x 轴对称，并且经过点(5，−4)，则抛物线的标准方程为（　　）.

（A）$y^2=\dfrac{16}{5}x$　　（B）$y^2=-\dfrac{16}{5}x$

（C）$x^2=\dfrac{16}{5}y$　　（D）$x^2=-\dfrac{16}{5}y$

（2）若抛物线焦点在 x 轴上，准线方程是 $x=-3$，则抛物线的标准方程是（　　）.

（A）$y^2=12x$　（B）$y^2=-12x$　（C）$y^2=6x$　（D）$y^2=-6x$

（3）抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为（　　）.

（A）$y=1$　（B）$x=1$　（C）$y=-1$　（D）$x=-1$

2．填写表 13-3.

表 13-3

标准方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
图形				
顶点				
对称轴				
焦点				

续表

标准方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
准线方程				
离心率				

3．填空题：

（1）抛物线 $y^2=4x$ 上一点 $P(4, y_0)$到焦点的距离为__________；

（2）与抛物线 $x^2=2y$ 关于 x 轴对称的抛物线方程为______________.

4．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点且斜率为 2 的直线 l 交抛物线于 A、B 两点，求 l 的方程和 AB 的距离.

B　组

1．选择题：

（1）抛物线 $x^2=4y$ 的焦点坐标是（　　）.

（A）(1, 0)　（B）(0, 1)　（C）(2, 0)　（D）(0, 2)

（2）抛物线 $y^2=-6x$ 的焦点到准线距离为（　　）.

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6

（3）抛物线 $y^2+4x=0$ 上一点到准线距离为 8，则该点的横坐标是（　　）.

（A）7　（B）6　（C）–7　（D）–6

（4）焦点为 F 的抛物线 $y^2=4x$ 内有一点 $A(2,\ 1)$，P 为抛物线上一点，则$|PA|+|PF|$的最小值为（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

2．填空题：

（1）顶点在原点，对称轴为 x 轴，且过点 $M(-2, 4)$的抛物线的标准方程为______________；

（2）顶点在椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的中心，并与椭圆有共同焦点的抛物线的标准方程为__________；

（3）设 A、B 为抛物线上两点，它们到抛物线焦点的距离分别为 2 和 4，则 AB 中点到准线的距离为___________.

3．设抛物线顶点在原点，焦点是圆 $x^2+y^2-4x=0$ 的圆心.

（1）求此抛物线标准方程；

（2）过抛物线的焦点且斜率为 2 的直线与抛物线和圆分别相交于 A，B，C，D 四点，如图 13-4 所示，求$|AB|+|CD|$.

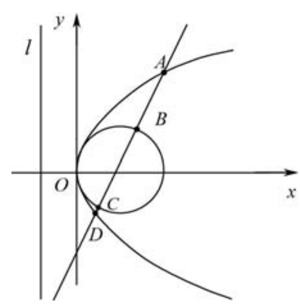


图 13-4

4．给定抛物线 C：$y^2=4x$，F 是 C 的焦点，O 为坐标原点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 l 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1)$，求：（1）直线 l 的方程；（2）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$．

综合练习 13

一、选择题：

1．方程 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 表示的曲线与坐标轴的交点个数是（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的离心率为（　　）．

（A）$\dfrac{7}{4}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

3．下列曲线离心率大于 1 的是（　　）．

（A）$25x^2+9y^2=144$　　（B）$y^2=-4x$

（C）$x^2+y^2-4x=0$　　（D）$25x^2-9y^2=144$

4．双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程是（　　）．

（A）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　（B）$y=\pm\dfrac{1}{4}x$　　（C）$y=\pm 2x$　　（D）$y=\pm 4x$

5．椭圆的一个焦点与短轴的两个端点的连线互相垂直，则该椭圆的离心率是（　　）．

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$

6．曲线 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与 $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$（$k$＜9＝有相同的（　　）．

（A）长轴　　（B）焦点　　（C）离心率　　（D）短轴

7．若双曲线的焦点在 x 轴上，且它的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{3}{4}x$，则双曲线的离心率为（　　）．

（A）$\dfrac{5}{4}$　　（B）$\dfrac{5}{3}$　　（C）$\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$　　（D）$\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

8．方程 $(m-1)x^2-(2-m)y^2=m$（m＞2）表示的曲线是（　　）．

（A）焦点在 x 轴上的双曲线　　（B）焦点在 y 轴上的双曲线

（C）焦点在 x 轴上的椭圆　　（D）焦点在 y 轴上的椭圆

9．如果椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 经过两点 $A(4,0)$，$B(0,3)$，则椭圆的标准方程是（　　）．

（A）$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

10．若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直，则该双曲线的离心率是（　　）.

（A）2　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

11．如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则实数 k 的取值范围是（　　）.

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$(0, 2)$　　（C）$(1,+\infty)$　　（D）$(0, 1)$

12．设 $\theta\in(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$，则方程 $x^2\csc\theta-y^2\sec\theta=1$ 所表示的曲线是（　　）.

（A）实轴在 y 轴上的双曲线　　（B）实轴在 x 轴上的双曲线

（C）长轴在 y 轴上的椭圆　　（D）长轴在 x 轴上的椭圆

二、填空题：

1．若抛物线 $y^2=ax$ 的准线方程是 $x=-1$，则焦点坐标是__________；

2．椭圆 $5x^2-ky^2=5$ 的一个焦点是$(0, 2)$，则 $k=$_______；

3．双曲线 $\dfrac{y^2}{2}-x^2=1$ 的两个焦点坐标是____________.

三、解答题：

1．求双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的实轴长，虚轴长，焦距，顶点坐标，焦点坐标，离心率及渐近线方程.

2．设椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和一开口向右，顶点在原点的抛物线有公共焦点，记 P 为该椭圆与抛物线的一个交点，如果点 P 的横坐标为 $\dfrac{1}{2}$，求此椭圆的离心率.

3．直线 $x+y-3=0$ 和抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点，在弧 AOB 上求一点 C，使△ABC 面积最大.

思想火花

既然时间给予人金子般的年华，人就应该让时间金子般地闪光。

第 14 章　坐标变换与参数方程

14.1　坐标轴平移

14.1.1　坐标轴的平移

【学习目标】

理解并掌握坐标轴的平移公式，并能应用它化简二元二次方程.

【学法指导】

在坐标变换下，点的坐标或曲线的方程一般都发生了变化，但点或曲线本身并不变，即曲线的形状和大小与坐标系的选择无关.

例题赏析

例 求椭圆 $9(x-2)^2+25(y-2)^2=225$ 的长轴和短轴的长，离心率，中心，顶点，焦点的坐标.

分析：通过坐标轴的平移，将方程化为新坐标系下的标准方程，在新坐标系下求出这些相关的量后，再利用平移公式求出原坐标系中有关问题的解.

解：原方程可化为$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$，

令 $x'=x-2$，$y'=y-2$，将原点移到 $O'(2，2)$，平移坐标轴.

在新坐标系中，椭圆的标准方程为$\dfrac{x'^2}{25}+\dfrac{y'^2}{9}=1$，其中 $a=5$，$b=3$，所以 $c=4$，$e=\dfrac{4}{5}$；椭圆的中心坐标为（0, 0），顶点坐标为 $A_1(-5,\ 0)$，$A_2(5,\ 0)$，$B_1(0,\ -3)$，$B_2(0,\ 3)$，焦点坐标为 $F_1(-4,\ 0)$，$F_2(4, 0)$.

在原坐标系中，椭圆的长轴长为 10，短轴长为 6，离心率为$\dfrac{4}{5}$，由移轴公式 $x=x'+2$，$y=y'+2$ 得，椭圆的中心坐标为$(2,\ 2)$，顶点坐标为 $A_1(-3,\ 2)$，$A_2(7,\ 2)$，$B_1(2,\ -1)$，$B_2(2,\ 5)$，焦点坐标为 $F_1(-2, 2)$，$F_2(6, 2)$.

易错易混问题剖析

平移坐标轴与函数图像的平移容易混淆．平移坐标轴是“轴动形不动”，函数图像平移是“形动轴不动”.

【同步训练 14.1.1】

A 组

1．选择题

（1）平移坐标轴，将原点移到$(2,\ -1)$，则点$(-1,\ -3)$在新坐标系中的坐标是(　　).

（A）$(3,2)$　　（B）$(-3,\ -2)$　　（C）$(-3,2)$　　（D）$(3,\ -2)$

（2）平移坐标轴，点 A 的坐标由$(2,\ -3)$变为$(-3,\ 2)$，则应把原点移到(　　).

（A）$(-5,\ -5)$　　（B）$(5,\ -5)$　　（C）$(-5,5)$　　（D）$(5,5)$

（3）平移坐标轴，将原点移到$(-3,\ 2)$，直线 $3x-2y-13=0$ 在新坐标系下的方程是(　　).

（A）$3x'-2y'-26=0$　　（B）$x'-y'=0$

（C）$2x'-2y'-1=0$　　（D）$3x'-2y'-8=0$

2．填空题

（1）平移坐标轴，使原坐标系下（$-2,\ 7$）的新坐标为（$3,\ 5$），则新坐标系原点的坐标为__________；

（2）平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,\ -1)$，直线 $y=2x-1$ 在新坐标系中的方程为__________.

3．平移坐标轴，把原点移到 $O'(1,\ -2)$，求下列各点的新坐标：

$O(0,0)$，$A(1,\ -2)$，$B(5,2)$，$C(3,\ -2)$.

4．平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,\ -4)$，求下列曲线关于新坐标系的方程:

(1) $x=3$；　　(2) $y=-4$；　　(3) $2x+3y+6=0$.

B 组

1．选择题

（1）下列 3 个变换中，①$\begin{cases}x=2x',\\ y=y'+1,\end{cases}$ ②$\begin{cases}x=x'+5,\\ y=y'-3,\end{cases}$ ③$\begin{cases}x=1-x',\\ y=y'+1,\end{cases}$ 其中表示坐标平移的是（　　）.

（A）①②　　（B）②③　　（C）②　　（D）①③

（2）设点 M（$x_1,\ y_1$）、N（$x_2,\ y_2$），经过坐标轴平移后，M 的新坐标为（$2x_1,\ 2y_1$），则 N 的新坐标为（　　）.

（A）$(2x_2,2y_2)$　　（B）(x_1+x_2,y_1+y_2)

（C）(x_1-x_2,y_1-y_2)　　（D）$(2x_1+x_2,2y_1+y_2)$

（3）将坐标原点平移到（$-3,\ 1$）处，则曲线 $y^2-6y-2x-1=0$ 在新坐标系中的方程为(　　).

（A）$y'^2-2x'=0$　　（B）$y'^2-4y'-2x'=0$

（C）$y'^2-8y'-2x'+16=0$　　（D）$y'^2-12y'-2x'+24=0$

（4）若双曲线的两顶点是 A（$2,1$），B（$2,\ -5$），离心率为$\sqrt{5}$，则双曲线方程是（　　）.

（A）$\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{36}=1$　　（B）$\dfrac{(y-2)^2}{9}-\dfrac{(x+2)^2}{36}=1$

（C）$\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{36}=\pm1$　　（D）$\dfrac{(y+2)^2}{9}-\dfrac{(x-2)^2}{36}=1$

（5）椭圆$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$，关于点 M（$-2, 1$）的对称曲线的方程是（　　）.

（A）$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$　　（B）$\dfrac{(x+5)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

（C）$\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$　　（D）$\dfrac{(x+5)^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

2．平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,\ -1)$，求点 $A(5, 1)$，$B(-3, 0)$在新坐标系中的坐标.

3．平移坐标轴，把原点移到 $O'(2,\ -3)$．求 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 在新坐标系中的方程，并画出新坐标轴和图形.

【知识链接】

1．把下面的二次三项式写成完全平方式：

（1）$y^2+8y+16$；　　（2）$x^2+4xy+4y^2$；

（3）$x^2-18x+81$；　　（4）$-9x^2+6x-1$.

2．填空：

（1）x^2+6x+____＝（$x+$__）^{2}；　　（2）x^2-12x+____＝（$x-$___）^{2}；

（3）x^2+x+ ____＝（$x+$__）^{2}；　　（4）$2x^2-20x+$___$=2$（$x-$___）^{2}.

14.1.2　利用坐标轴的平移化简二元二次方程

【学习目标】

理解坐标轴的平移公式，并能应用公式化简二元二次方程.

【学法指导】

化简二次曲线方程的常用方法有以下两种.

（1）待定系数法：将平移公式 $x=x'+h$，$y=y'+k$ 代入原方程，经过化简后再令一次项系数或常数项等于零，从而确定 h，k 的值，然后代回即可；

（2）配方法：对于缺少 xy 项的二元二次方程 $f(x,\ y)=0$，可通过配方将方程化为 $(x-h)^2+(y-k)^2=m(m\geqslant0)$的形式后，确定平移公式 $x'=x-h$，$y'=y-k$，将方程 $f(x, y)=0$ 化简.

对于缺 xy 项的二次曲线方程的化简，用配方法较为简捷.

例题赏析

例 求满足下列条件的圆锥曲线方程：

（1）求顶点为（$-4, 2$），准线为 $y=9$ 的抛物线方程.

（2）双曲线的对称轴平行于坐标轴，两个焦点都在 y 轴上，一条渐近线方程为

$2x-y+1=0$，又双曲线过原点，求该双曲线的方程.

分析：求顶点不在原点的抛物线方程或中心不在原点的双曲线方程时，先根据题设，勾画出曲线的形状和大体位置，再利用数形结合和曲线的基本性质，求出待定系数，这样解题准确迅速.

解：（1）将原点移至（$-4, 2$），即平移公式为 $x'=x+4$，$y'=y-2$，

在新坐标系中，抛物线的准线方程为 $y'=7$.

因为$\dfrac{p}{2}=7$，得 $p=14$．又由抛物线开口向下，故可得到它在新坐标系中的标准方程为 $x'^2=-28y'$.

将平移公式代入新方程中得到抛物线在原坐标系中的方程为

$$(x+4)^2=-28(y-2).$$

（2）直线 $2x-y+1=0$ 与 y 轴交点的（$0, 1$）为双曲线的中心，

将原点移至（$0, 1$），即平移公式为 $x'=x$，$y'=y-1$，

将平移公式代入直线 $2x-y+1=0$ 中，得 $2x'-(y'+1)+1=0$，即 $y'=2x'$，这就是双曲线在新坐标系中的渐近线方程．由此可得 $\dfrac{a}{b}=2$.

设新坐标系中双曲线的标准方程为 $\dfrac{y'^2}{a^2}-\dfrac{x'^2}{b^2}=1$，

则由平移公式，可设双曲线在原坐标系中的方程为 $\dfrac{(y-1)^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

由双曲线过原点，将 $x=0$，$y=0$ 代入得 $\dfrac{1}{a^2}=1$，

所以 $a^2=1$，

又 $\dfrac{a}{b}=2$，则 $b=\dfrac{1}{2}$.

所以双曲线方程为 $(y-1)^2-4x^2=1$.

【同步训练 14.1.2】

A　　组

1．选择题

（1）如果曲线 $x^2-y^2-2x-2y-1=0$ 经过平移坐标系后的新方程为 $x'^2-y'^2=1$，那么新坐标系的原点在原坐标系中的坐标为（　　）.

（A）$(1, 1)$　　（B）$(-1, -1)$　　（C）$(-1, 1)$　　（D）$(1, -1)$

（2）通过坐标轴平移，将曲线方程 $4x^2-8x-3y-5=0$ 化简为标准方程 $x^2=\dfrac{3}{4}y'$ 时，运用的平移公式是（　　）.

（A）$\begin{cases}x=x'-1,\\y=y'+3,\end{cases}$　（B）$\begin{cases}x=x'+1,\\y=y'-3,\end{cases}$　（C）$\begin{cases}x=x'-1,\\y=y'-3,\end{cases}$　（D）$\begin{cases}x=x'+1,\\y=y'+3.\end{cases}$

2．平移坐标轴，按下列条件确定新坐标系原点在原坐标系中的坐标：

（1）点（$-2, 7$）的新坐标为（$3, 5$）；

（2）使方程 $x^2-4x-8y+36=0$ 不含 x 的一次项和常数项.

3．平移坐标轴，化简方程，并说出原方程表示什么曲线：

（1）$x^2+y^2-6x+12y-4=0$；

（2）$y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$；

（3）$x^2-y^2+8x-14y-133=0$；

（4）$x^2+y^2-4x+8y-5=0$.

B　　组

1．选择题

（1）坐标轴平移后，下列各项中发生变化的是（　　）.

（A）某两点间的距离　　（B）某线段中点的坐标

（C）某两条直线的夹角　　（D）某三角形的面积

（2）曲线 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 在新坐标系中的方程是 $x'^2+y'^2=4$，则新坐标系原点在原坐标系中的坐标是（　　）.

（A）$(-1, 2)$　　（B）$(1, -2)$　　（C）$(2, -1)$　　（D）$(-2, 1)$

（3）平移坐标轴,将原点移至 O'，使得直线方程 $3x-2y-5=0$ 变为 $3x'-2y'=0$，则 O'在原坐标系中的坐标可以是（　　）.

（A）$(-1, 1)$　　（B）$(1, -1)$　　（C）$(-1, -1)$　　（D）$(1, 1)$

2．求适合下列条件的曲线方程：

（1）中心为 O'（$-2,1$），长半轴为 10，焦距为 12，焦点在平行于 x 轴的直线上的椭圆的方程；

（2）虚轴的长是 8，两顶点是 A（2,1）和 A'（2，-5）的双曲线方程；

（3）焦点是 F（3，-3），准线是 $y=1$ 的抛物线.

【知识链接】

$\cos\frac{\pi}{6}=$______；　$\sin\frac{\pi}{6}=$_____；

$\cos\frac{\pi}{4}=$______；　$\sin\frac{\pi}{4}=$______；

$\cos\frac{\pi}{3}=$______；　$\sin\frac{\pi}{3}=$______；

$\cos\frac{\pi}{2}=$______；　$\sin\frac{\pi}{2}=$______.

14.1.3　坐标轴的旋转

【学习目标】

理解坐标轴的旋转公式，并能应用它化简二元二次方程.

【学法指导】

经过移轴和转轴，方程的次数没有改变，并且经过适当的转轴，可使变换前后二元二次方程的二次项系数之间满足等式 $B^2-4AC=-4A'C'$. 因此，我们可以利用坐标变换化简方程，研究曲线.

例题赏析

例 将坐标轴旋转 45°，求曲线 $xy=6$ 在新坐标系中的方程.

解：因为 $\theta=45°$，所以 $\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，代入转轴公式，得

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\ ,\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\ .$$

代入原方程，得

$$\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}=6,$$

即 $x'^2-y'^2=12$.

【同步训练 14.1.3】

A　　组

1．选择题

（1）把坐标系旋转$\dfrac{\pi}{3}$，设点 M 在新坐标系中的坐标为(1，2)，则点 M 在原坐标系中的坐标是（　　）.

（A）$(\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1)$　　（B）$(\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1)$

（C）$(\frac{\sqrt{3}}{2}+1,\ \frac{1}{2}-\sqrt{3})$　　（D）$(-\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1)$

（2）把坐标系旋转$\dfrac{\pi}{3}$，设点 M 在原坐标系中的坐标为(1, 2)，则点 M 在新坐标系中的坐标是（　　）.

（A）$(\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1)$　　（B）$(\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$

（C）$(\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$　　（D）$(\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1)$

（3）将坐标轴旋转$\dfrac{\pi}{4}$，则曲线 $x^2-y^2=8$ 在新坐标系中的方程（　　）.

（A）$x'y'-4=0$　　（B）$x'y'+4=0$

（C）$x'y'-1=0$　　（D）$x'y'+1=0$

2．填空题

（1）把坐标轴旋转$\dfrac{\pi}{6}$，求点 $P(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$在新坐标系中的坐标为________；

（2）点 $P'(3, 1)$是由点 $P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$将坐标轴旋转________得到的；

（3）将坐标轴旋转$\dfrac{\pi}{2}$，则曲线 $x-y=0$ 在新坐标系中的方程为________.

3．将坐标轴旋转$\frac{\pi}{4}$，求

（1）点$(3, 4)$在新坐标系中的坐标；

（2）新坐标系中点$(3, 4)$在原坐标系中的坐标；

（3）曲线 $x^2+3xy+y^2=1$ 在新坐标系中的方程.

4．设新坐标系的原点为$(-2, 2)$，旋转的角度为$\frac{\pi}{6}$，求：

（1）原坐标原点在新坐标系中的坐标；

（2）直线 $x+y=0$ 在新坐标系中的方程.

B　组

1．点 $P(1, 3)$经过旋转角θ后，新坐标为 $P(3, -1)$，求旋转角θ.

2．将坐标轴旋转角$\frac{\pi}{3}$后，得新坐标系 $x'O'y'$，试求：

（1）点 $P(3, 1)$的新坐标；

（2）若点 Q 的新坐标为$(-1, 2)$，则点 Q 的原坐标.

3．按所给的角 θ 旋转坐标轴，变换下列各方程：

（1）$x^2+4xy+y^2=16$，$(\theta=\frac{\pi}{4})$；

（2）$x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0$，$(\theta=\frac{\pi}{4})$；

（3）$5x^2-6xy+5y^2=8$，$(\theta=\frac{\pi}{4})$.

【知识链接】

1．$\cos2\theta$ ＝____________＝____________＝____________.

2．若已知 $\cos2\theta=-\frac{3}{5}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，则 $\cot2\theta$=______，$\sin\theta$ ＝______，$\cos\theta$ ＝_____.

*14.1.4　利用坐标轴的旋转化简二元二次方程

【学习目标】

了解应用坐标轴的旋转公式化简二元二次方程，从而判别方程式表示什么曲线.

【学法指导】

坐标轴的旋转公式中的旋转角θ，可以从公式 $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$解得．这里角$\theta$ 本应是多值的，但由于化简的目的只是为了消去 xy 项，因此只要取其中的一个值即可．为了应用公式的方便，我们限定θ 取最小的正值．限定 $0\leqslant 2\theta<\pi$，即 $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

例题赏析

例　利用旋转坐标轴，化简方程 $x^2-2xy+y^2-2=0$.

解：$\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}=0$，

$$2\theta=90°，\theta=45°.$$

所以 $\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

代入旋转公式得

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

代入原方程得$\dfrac{1}{2}(x'-y')^2-\quad(x'^2-y'^2)+\dfrac{1}{2}(x'+y')^2=2$.

整理，得：$y'^2=1$.

【同步训练 14.1.4】

A　　组

1．将坐标轴绕原点旋转$\dfrac{\pi}{4}$后，求曲线 $xy=1$ 的新方程.

2．方程 $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2+3x-4y-2=0$ 经坐标轴旋转一锐角θ 后，可使方程消去 xy 项，求角θ.

3．设方程 $x^2+2xy+y^2+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y+8=0$ 的图形为 G，将坐标轴旋转θ 角，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，使 G 的新方程中不含 $x'y'$项.

（1）求角θ;

（2）求图形 G 的新方程.

B　　组

1．将坐标轴旋转角 $\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$，使点 $P(3, 4)$在新坐标系中的坐标为 $P'\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

（1）求角 θ;

（2）求点 $Q(6, -2)$的新坐标.

2．将坐标轴绕原点旋转一个锐角 θ 后，曲线 C：$8x^2+4xy+5y^2=36$ 的新方程为 $ax'^2+cy'^2=f$，试求：

（1）$(\cos\theta, \sin\theta)$；

（2）a，c，f 的值 .

【知识链接】

已知 $\cot 2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，则 $\cos 2\theta=$______，$\sin\theta$ =______，$\cos\theta$ =_____.

*14.2　一般二元二次方程的讨论

*14.2.1　化一般二元二次方程为标准式

【学习目标】

综合应用坐标轴的平移公式和旋转公式化简二元二次方程.

【学法指导】

一般对二次曲线的方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 来说，坐标轴的旋转可以使方程不含 $x'y'$项，坐标轴的平移可以使方程不含某个一次项或常数项，两者结合起来使用就能把一般方程化成标准形式.

例题赏析

例　化简方程 $16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+400=0$.

解：因为 $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B} = -\dfrac{7}{24}$，

所以 $\cos 2\theta = -\dfrac{7}{25}$，

所以 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$.

代入旋转公式得

$$x = \frac{3x' - 4y'}{5},$$

$$y = \frac{4x' + 3y'}{5}.$$

代入原方程化简得 $y'^2 - 4x' + 16 = 0$.

$$y'^2 = 4(x' - 4).$$

由平移公式，$y'' = y'$，$x'' = x' - 4$ 得

$$y''^2 = 4x''.$$

【同步训练 14.2.1】

A　组

设二次曲线 C：$4x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 6y + 7 = 0$，将坐标系旋转$\theta$ 角，使 $0° < \theta < 90°$且 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，若点 P 的新坐标为(x', y')，而原坐标为(x, y)，则点 P 的原坐标(x, y)用 x'，y'表示时，$\begin{cases} x = ________ \\ y = ________ \end{cases}$，若 C 对新坐标系而言，其方程式可化为 $5y'^2 + ax' + by' + c = 0$，其中 a，b，c 为定数，则 $a =$____，$b =$____，$c =$____.

B　组

将坐标轴旋转角θ（$0° < \theta < 90°$），得一新坐标系使得曲线Γ：$52x^2 - 72xy + 73y^2 = 100$ 的新方程中没有 $x'y'$项，试求：

（1）分别计算 $\cot 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\sin\theta$，$\cos\theta$ ；

（2）求Γ的新方程并判断Γ的图形；

（3）Γ焦点的原坐标.

【知识链接】

若 $\cot 2\theta = 0$，则 $2\theta =$______，$\theta =$______，则 $\sin\theta =$______，$\cos\theta =$______.

*14.2.2　一般二元二次方程的讨论

【学习目标】

综合应用平移公式和旋转公式讨论一般二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的化简问题，总结出利用判别式判别方程类型的一种方法.

【学法指导】

化简二元二次方程时，先根据判别式判别方程的类型，再合理安排平移或旋转的顺序.

若 $B^2-4AC<0$ 或 $B^2-4AC>0$，一般二次方程表示椭圆或双曲线．对于这类有心二次曲线，化简方程时，要先平移消去一次项，再旋转消去 xy 项.

若 $B^2-4AC=0$，一般二次方程表示抛物线．对于这类无心二次曲线，化简方程时，要先旋转消去 xy 项，再平移.

例题赏析

例　已知 k 是实数，讨论方程 $(1-k)x^2+ky^2+2x=0$ 所表示的图形.

解：$B^2-4AC=0-4(1-k)k=4(k-1)k$，

（1）$B^2-4AC<0$ 时，即 $0<k<1$ 且 $k\neq\frac{1}{2}$，表示椭圆；

特殊的，$1-k=k$ 时，$k=\frac{1}{2}$，表示圆；

（2）$B^2-4AC>0$ 时，即 $k<0$ 或 $k>1$，表示双曲线；

（3）$B^2-4AC=0$ 时，即 $k=1$ 时，表示抛物线；$k=0$ 时，表示两平行直线.

【同步训练 14.2.2】

A　组

1．在坐标平面上，下列方程表示什么图形？

（1）$x^2-4x-5=0$；

（2）$x^2+4y^2-4x+16y+21=0$；

（3）$x^2-2y^2+6x+4y+7=0$.

2．判断下列二次曲线为何种图形？

（1）$4x^2-12xy+9y^2+10x-15y+4=0$；

（2）$x^2-4xy+4y^2-6x+12y+9=0$；

（3）$9x^2+6xy+y^2+6x+2y+5=0$.

3．在坐标平面上，下列方程式表示什么图形？

（1）$y^2+4x-6y-7=0$；

（2）$y^2+4y-5=0$；

（3）$4x^2+y^2+24x-6y+45=0$；

（4）$x^2-4y^2-8x+8y+12=0$.

B 组

1．曲线$\varGamma$：$k(x^2-y^2-2y)+4y^2-8=0$，k 为实数．

（1）$\varGamma$ 表示两平行直线时，$k=$__________；

（2）$\varGamma$ 表示一椭圆时，k 值的范围为__________；

（3）$\varGamma$ 表示一双曲线时，k 值的范围为__________．

2．二次方程式 $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0$ 利用配方法，可化为$(2x-y)^2+a(2x-y)+b=0$ 的形式，其中 a，b 为定数．

（1）求 a，b 的值；

（2）若进一步化为$(2x-y+h)^2=k$ 的形式，其中 h，k 为两定数，求 h，k 的值；

（3）由此可知此二次式表示什么图形．

【知识链接】

1．角 θ 的终边与单位圆交点的坐标是__________．

2．当 $\theta=30°$时，其终边与单位圆交点 M 的坐标是__________．

3．若角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$）的终边与单位圆交点 M 的坐标是$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则角 θ 等于__________．

14.3 参 数 方 程

14.3.1 曲线的参数方程

【学习目标】

理解曲线的参数方程的概念，掌握曲线的参数方程与普通方程间的互化．

【学法指导】

将参数方程化为普通方程的方法有：（基本思想是消去参数）

（1）代入消参法；

（2）代数变换法（+，−，×，÷，乘方）；

（3）三角消参法．

注意：参数取值范围对 x，y 取值范围的限制．(参数方程与普通方程的等价性)

例题赏析

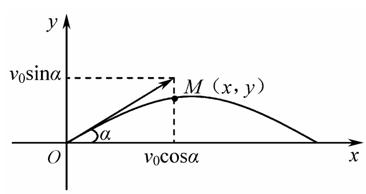


图 14-1

例 设炮弹的发射角为α，发射的初速度为 v_0，求弹道曲线的方程（不计空气阻力等因素）．

解：取炮口为坐标原点，水平方向为 x 轴，建立直角坐标系；设炮弹发射后的位置为 M（x，y）；炮弹在水平方向作匀速直线运动，在竖直方向上作竖直上抛运动，如图 14-1

所示.

x 轴和 y 轴方向上分别是炮弹飞行过程中的水平位移和竖直位移（竖直高度），在水平方向的初速度是 $v_0\cos\alpha$，在竖直方向的初速度是 $v_0\sin\alpha$，用炮弹飞行的时间 t 作为第三方参数，得到：

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t\ ,\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2.$$

令 $y=0$，解得：$t=0$ 或 $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

得到时间参数 t 的范围是 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

所以炮弹轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t\\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$，$\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)$.

易错易混问题剖析

并不是所有的参数方程都能化为普通方程，在化参数方程为普通方程时，x, y 的变化范围不能扩大或缩小，即对应曲线上的点不能有增减.

【同步训练 14.3.1】

A　组

1．选择题

（1）已知曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=t\\ y=t^2+1\end{cases}$ (t 为参数)，则点 $M_1(-1, 2)$，$M_2(5, 4)$与曲线 C 的位置关系是(　　).

（A）M_1 在曲线 C 上，但 M_2 不在　　（B）M_1 不在曲线 C 上，但 M_2 在

（C）M_1，M_2 都在曲线 C 上　　（D）M_1，M_2 都不在曲线 C 上

（2）将参数方程$\begin{cases}x=2+\sin^2\theta\\ y=\sin^2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程(　　).

（A）$y=x-2$　　（B）$y=x+2$

（C）$y=x-2\ (2\leqslant x\leqslant 3)$　　（D）$y=x+2(0\leqslant y\leqslant 1)$

（3）参数方程$\begin{cases}x=\sqrt{t}\ +1\\ y=1-2\sqrt{t}\end{cases}$ (t 为参数)表示的曲线是(　　).

（A）一条直线　　（B）一个半圆　　（C）一条射线　　（D）一个圆

2．填空题

（1）设 $y=t-1$(t 为参数)，化方程 $y^2-x-y-1=0$ 为参数方程______；

（2）双曲线$\begin{cases}x=2\tan\theta\\ y=3\sec\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的焦点坐标是________；

（3）双曲线$\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}+2\\ y=t-\dfrac{1}{t}+1\end{cases}$的中心坐标是____________.

3．动点 M 作匀速直线运动，它在 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 5m/s 和 3m/s，直角坐标系的长度单位是 1m，点 M 的起始位置在点(1, 2)处，求点 M 的轨迹的参数方程．

4．把下列参数方程（θ、t 为参数）化为普通方程，并说明它们各表示什么曲线：

（1）$\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=2\sin\theta; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x=2t^2, \\ y=2t; \end{cases}$ $(p>0)$

（3）$\begin{cases} x=3-t, \\ y=-1-2t; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=\sin\theta. \end{cases}$

B　组

1．选择题

（1）曲线$\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=4t-3 \end{cases}$（$t$ 为参数）与 x 轴交点的坐标是（　　）．

（A）(1, 4)　　（B）$(\frac{25}{16}, 0)$　　（C）(1, −3)　　（D）$(\pm\frac{25}{16}, 0)$

（2）与参数方程$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$（$t$ 为参数, $t\in\mathbf{R}$）表示同一曲线的方程是（　　）．

（A）$\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$（$t$ 为参数, $t\in\mathbf{R}$）　　（B）$\begin{cases} x=t^2 \\ y=1-t^2 \end{cases}$（$t$ 为参数, $t\in\mathbf{R}$）

（C）$\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=1-\sin\theta \end{cases}$（$\theta$为参数, $\theta\in\mathbf{R}$）　　（D）$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数, $t\in\mathbf{R}$）

（3）已知动圆方程 $x^2+y^2-x\sin2\theta+2\sqrt{2}y\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=0$（$\theta$为参数），那么圆心轨迹是（　　）．

（A）椭圆　　（B）椭圆的一部分　　（C）抛物线　　（D）抛物线的一部分

2．已知参数方程$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，$\theta\in[0, 2\pi]$，判断点 $A(1, \sqrt{3})$和 $B(2, 1)$是否在方程的曲线上．

3．化参数方程$\begin{cases} x=-4t^2 \\ y=t+1 \end{cases}$（$t\geqslant0$，$t$ 为参数）为普通方程，说明方程的曲线是什么图形．

【知识链接】

1．当炮弹的初速度为 200m/s，炮弹的发射角为 30°，求该炮的射程是多少？（重力加速度 $g=10$，精确到 1m）

2．圆心在原点，半径为 5 的圆的标准方程是__________；圆心在点(−1，2)，半径为 3 的圆的标准方程是__________．

14.3.2　圆的参数方程

【学习目标】

理解并掌握圆的参数方程以及参数的几何意义，并能运用它解决简单的问题.

【学法指导】

圆上每一点的坐标 x，y 与参数 θ 的关系比较明显，让学生熟练运用圆的参数方程解决问题.

例题赏析

例　已知点 P 是圆 C：$(x-5)^2+(y-5)^2=r^2$ 上一动点，点 P 关于点 $A(5,0)$的对称点为 Q，半径 CP 绕圆心 C 按逆时针方向旋转 90°后得到点 M，求$|QM|$的最大值和最小值.

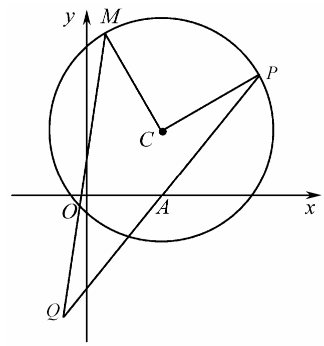


图 14-2

解：如图 14-2 所示，设点 $P(5+r\cos\theta，5+r\sin\theta)$，则点 M 为$(5+r\cos(\theta+90°)，5+r\sin(\theta+90°))$，

即 $M(5-r\sin\theta，5+r\cos\theta)$.

又点 A（5, 0）为 PQ 的中点，则点 Q 为$(5-r\cos\theta，-5-r\sin\theta)$，

且$|QM|^2=(-r\sin\theta+r\cos\theta)^2+(10+r\cos\theta+r\sin\theta)^2$

$=2\left[r^2+10\sqrt{2}\,r\sin(\theta+45°)+50\right]$，

所以当 $\theta=45°$ 时，$|QM|$取得最大值$\sqrt{2(r+5\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}(r+5\sqrt{2})$，当 $\theta=225°$时，$|QM|$取得最小值 $\sqrt{2(r-5\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}|r-5\sqrt{2}|$.

点评：此题是根据圆的参数方程，利用转角 θ 作参数，由点 P 坐标求点 M 坐标，再把与 x，y 相关的$|QM|$的最值转化成 $\sin(\theta+45°)$的最值来求解.

【同步训练 14.3.2】

A　组

1．选择题

（1）若 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0$，则$\begin{cases}x=2-\cos\theta\\y=\sin(-\theta)\end{cases}$表示的曲线是（　　）.

（A）线段　（B）四分之一个圆　（C）半圆　（D）圆

（2）参数方程$\begin{cases}x=3+3\cos\theta\\y=-3+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）表示的图形是（　　）.

（A）圆心为（$-3,3$），半径为 9 的圆　（B）圆心为（$-3,3$），半径为 3 的圆

（C）圆心为（3，-3），半径为 9 的圆　（D）圆心为（3，-3），半径为 3 的圆

（3）直线$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t\\y=-3\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆 $x^2+y^2=16$ 交于 A、B 两点，则 AB 的中点坐标是（　　）.

（A）（3，-3）　（B）（$-\sqrt{3},3$）　（C）（$\sqrt{3}$，-3）　（D）（3，$-\sqrt{3}$）

2．填空题

（1）已知圆 O 的参数方程是$\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=5\sin\theta\end{cases}$（$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$），若圆上点 P 对应的参数 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，则点 P 的坐标是________；若圆上点 Q 的坐标是 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$，则点 Q 对应的参数 $\theta=$__________.

（2）直线 $3x-4y-9=0$ 与圆$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的位置关系是________.

（3）曲线$\begin{cases}x=5\cos\theta,\\y=5\sin\theta,\end{cases}$（$\dfrac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi$）的长度是________.

3．写出下列圆的参数方程：

（1）圆心在原点，半径为 3；

（2）圆心在点$(0, 1)$，半径为 3；

（3）圆心在点$(2, 1)$，半径为$\sqrt{5}$ ；

（4）圆心在点$(-3, 1)$，半径为 1.

4．由圆 $x^2+y^2=25$ 上动点 M 作 y 轴的垂线，交 y 轴于点 N，设线段 MN 的中点为 P，求点 P 的轨迹的参数方程.

B　组

1．选择题

（1）参数方程$\begin{cases}x=4+\cos\theta\\y=-1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程为（　　）.

（A）$(x+4)^2+(y+1)^2=1$　　（B）$(x-4)^2+(y+1)^2=1$

（C）$(x+4)^2+(y-1)^2=1$　　（D）$(x-4)^2+(y-1)^2=1$

（2）参数方程$\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=5\sin\theta\end{cases}$（$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$）表示的图形是（　　）.

（A）以原点为圆心，半径为 5 的圆

（B）以原点为圆心，半径为 5 的上半圆

（C）以原点为圆心，半径为 5 的下半圆

（D）以原点为圆心，半径为 5 的右半圆

（3）在参数方程$\begin{cases}x=a+t\cos\theta\\y=b+t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数）所表示的曲线上有 B、C 两点，它们对应的参数值分别为 t_1、t_2，则线段 BC 的中点 M 对应的参数值是（　　）.

（A）$\dfrac{t_1-t_2}{2}$　　（B）$\dfrac{t_1+t_2}{2}$　　（C）$\dfrac{|t_1-t_2|}{2}$　　（D）$\dfrac{|t_1+t_2|}{2}$

（4）已知点 $P(x_0, y_0)$ 在圆$\begin{cases}x=3+8\cos\theta\\y=-2+8\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）上，则 x_0，y_0 的取值范围是（　　）.

（A）$-3\leqslant x_0\leqslant3$，$-2\leqslant y_0\leqslant2$　　（B）$3\leqslant x_0\leqslant8$，$-2\leqslant y_0\leqslant8$

（C）$-5\leqslant x_0\leqslant 11$，$-10\leqslant y_0\leqslant 6$　　　（D）以上都不对

（5）设 $r>0$，那么直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=r$ 与圆 $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的位置关系是（　　）.

（A）相交　　（B）相切　　（C）相离　　（D）视 r 的大小而定

2．填空题

（1）半圆 $x^2+y^2=4$（$y\geqslant 0$）的一个参数方程是________________；

（2）在平面直角坐标系 xoy 中，直线 l 的参数方程为 $x+y=6$，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta+2\end{cases}$（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$），则圆 C 的圆心坐标为__________，圆心到直线 l 的距离为________.

【知识链接】

判断直线 $3x-4y+6=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 的位置关系.

14.3.3　直线的参数方程

【学习目标】

1．掌握直线参数方程的标准形式和一般形式，理解参数的几何意义；

2．熟悉直线的参数方程与普通方程之间的互化；

3．利用直线的参数方程求线段的长，求距离、求轨迹、与中点有关等问题.

【学法指导】

利用直线的参数方程求线段的长，求距离、求轨迹、与中点有关等问题时，要充分利用参数 t 的几何意义


例题赏析

例　写出经过点 M_0（-2, 3），倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$ 的直线 l 的标准参数方程，并且求出直线 l 上与点 M_0 相距为 2 的点的坐标.

解：直线 l 的标准参数方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos\dfrac{3\pi}{4},\\y=3+t\sin\dfrac{3\pi}{4},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$（$t$ 为参数）(1)

设直线 l 上与已知点 M_0 相距为 2 的点为 M 点，且 M 点对应的参数为 t，

则 $|M_0M|=|t|=2$，所以 $t=\pm 2$，将 t 的值代入(1)式

当 $t=2$ 时，M 点在 M_0 点的上方，其坐标为（$-2-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}$）；

当 $t=-2$ 时，M 点在 M_0 点的下方，其坐标为（$-2+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$）.

点拨：若使用直线的普通方程利用两点间的距离公式求 M 点的坐标较麻烦，而使用直线的参数方程，充分利用参数 t 的几何意义求 M 点的坐标较容易.

【同步训练 14.3.3】

A　组

1．选择题

（1）直线$\begin{cases}x=3+4t\\y=4-5t\end{cases}$（$t$ 为参数）的斜率等于（　　）．

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{4}{3}$　　（C）$-\dfrac{5}{4}$　　（D）$-\dfrac{4}{5}$

（2）直线$\begin{cases}x=-3-\dfrac{1}{2}t\\y=4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）的倾斜角为（　　）．

（A）$\dfrac{5\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{3\pi}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi}{3}$

（3）下列向量与直线$\begin{cases}x=3-2t\\y=-1-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）共线的是（　　）．

（A）$(-1, 2)$　　（B）$(2, 1)$　　（C）$(1, 2)$　　（D）$(1,\ -2)$

2．填空题

（1）直线$\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\end{cases}$上对应 $t=0$，$t=1$ 的两点间的距离是____.

（2）已知直线 l_1：$\begin{cases}x=1+3t\\y=2-4t\end{cases}$($t$ 为参数)与直线 l_2:$2x-4y=5$ 相交于点 B，又点 A（1, 2），则 $|AB|=$__________.

（3）直线$\begin{cases}x=-2-\sqrt{2}t\\y=3+\sqrt{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）上与点 A'（-2, 3）的距离等于$\sqrt{2}$的点的坐标是__________.

3．求直线$\begin{cases}x=2-\dfrac{1}{2}t\\y=-1+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

4．设直线 l 经过点 $M_0(1, 5)$，倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$.

（1）求直线 l 的参数方程；

（2）求直线 l 和直线 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点到点 M_0 的距离.

B　组

1．化直线 l_1 的普通方程 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 为参数方程，并说明参数的几何意义，说明 $|\,t\,|$ 的几何意义.

2．求直线$\begin{cases}x=3+t\sin 20^\circ\\ y=4-t\cos 20^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数）的倾斜角.

3．已知直线 l 过点 P（2，0），斜率为$\dfrac{4}{3}$，直线l 和抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点，设线段 AB 的中点为 M，如图 14-3 所示。求：

（1）P，M 两点间的距离$|PM|$；

（2）M 点的坐标；

（3）线段 AB 的长$|AB|$.

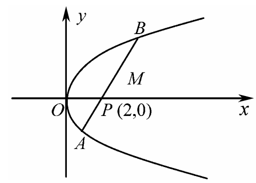


图 14-3

4．已知直线 l 经过点 P（1, 1），倾斜角$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

（1）写出直线 l 的参数方程；

（2）设 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于两点 A、B，求弦 AB 中点的坐标及点 P 到 A、B 两点的距离之积.

【知识链接】

椭圆、双曲线、抛物线的标准方程各是什么？它们都有哪些几何性质？

14.3.4　圆锥曲线的参数方程

【学习目标】

了解圆锥曲线的参数方程及简单应用.

【学法指导】

圆锥曲线的参数方程的应用，教师可先让学生尝试用普通方程来做，让学生深刻体会参数方程的优点.

例题赏析

例　求椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{81}=1$ 上的点到直线 $3x+4y-64=0$ 的最大、最小距离.

解：将椭圆普通方程化为参数方程$\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=9\sin\theta\end{cases}$（$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$），则椭圆任意一点 P 的坐标可设为 $P(5\cos\theta, 9\sin\theta)$，于是点 P 到直线 $3x+4y-64=0$ 的距离

$$d=\frac{|3\times5\cos\theta+4\times9\sin\theta-64|}{5}=\frac{|39\sin(\theta+\varphi)-64|}{5}$$

所以，$d_{\max}=\dfrac{103}{5}$，此时 $\sin(\theta+\varphi)=-1$，$d_{\min}=5$，此时 $\sin(\theta+\varphi)=1$.

点评：利用参数方程，将圆锥曲线上的点的坐标设为参数形式，这样减少曲线上点的坐标所含变量的个数，将二元函数的问题转化为一元函数的问题.

【同步训练 14.3.4】

A　组

1．选择题

（1）已知抛物线$\begin{cases}x=4t^2\\y=4t\end{cases}$（$t$ 为参数）的焦点为 F，则点 M（$3, m$）到 F 的距离$|MF|$为（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）如图 14-4 所示若关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根是 $\sin\alpha$和 $\cos\alpha$，则点(p, q)的轨迹为（　　）.

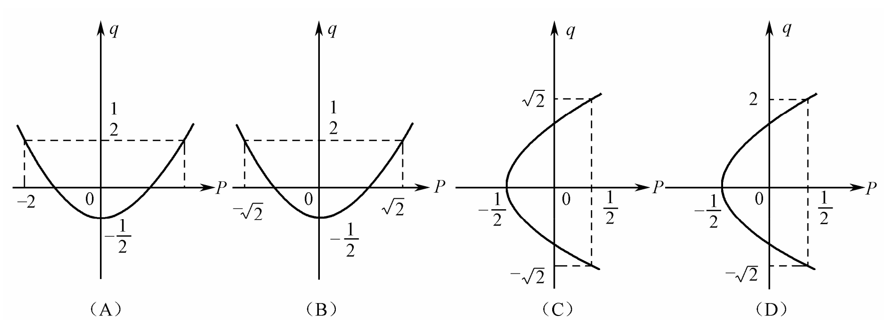


图 14-4

（3）设 $P(x, y)$是曲线 C：$\begin{cases}x=-2+\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$）上任意一点，则$\dfrac{y}{x}$的取值范围是（　　）.

（A）$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$　　（B）$(-\infty, \sqrt{3})\cup[\sqrt{3}, +\infty]$

（C）$[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}]$　　（D）$(-\infty, \dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty]$

（4）点 $P(1,0)$到曲线$\begin{cases}x=t^2\\y=2t\end{cases}$（其中参数 $t\in\mathbf{R}$）上的点的最短距离为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

2．填空题：

（1）椭圆$\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的离心率是________；

（2）椭圆$\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的焦点坐标是__________；

（3）双曲线$\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$（$t$ 为参数）的离心率是________.

B　　组

1．填空题：

（1）曲线$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）上的点与定点 A（-1，-1）距离的最小值是_______；

（2）已知 $4x^2+9y^2=36$，则 $2x-\sqrt{3}y$ 的最小值是________________；

（3）点 M（x,y）在椭圆$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，则点 M 到直线 $x+y-4=0$ 的最大距离为________，此时点 M 的坐标是____________.

2．求证：不论 t 如何变化，方程 $y^2-2x-6y\sin t-9\cos^2 t+6\sqrt{3}\cos t+10=0$ 都表示顶点在同一椭圆上的抛物线.

【知识链接】

直线、圆、椭圆的参数方程和标准方程各是什么？

14.4　参数方程的应用举例

【学习目标】

应用参数方程解决简单问题.

【学法指导】

根据已知条件、图形的几何性质或问题的物理意义，建立点的坐标与参数的函数关系式，是应用参数方程解决实际问题的关键.

例题赏析

例　求椭圆$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的点到直线 $x-y+6=0$ 的距离的最小值.

分析：先写出椭圆的参数方程，由点到直线的距离建立三角函数关系式，求出距离的最小值.

解：椭圆的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$.

设椭圆上的点的坐标为($\sqrt{3}\cos\theta$，$\sin\theta$)，则该点到直线 $x-y+6=0$ 的距离为

$$d=\frac{|\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+6|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)+6|}{\sqrt{2}}.$$

当 $\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=-1$ 时，$d_{最小值}=2\sqrt{2}$.

说明：应用曲线的参数方程解决此类问题比较容易.

【同步训练 14.4】

A　组

1．选择题

（1）圆锥曲线中：①焦点坐标、②对称轴方程、③准线方程、④长短轴的长、⑤离心率、⑥焦点到准线的距离，经过坐标平移后，它们（　　）.

（A）都不变　　（B）都变

（C）①②③⑥变，其余不变　　（D）①②③变，其余不变

（2）已知动圆：$x^2+y^2-2ax\cos\theta-2by\sin\theta=0$（$a$、$b$ 是正常数，$a\neq b$，θ 是常数），则圆心的轨迹是（　　）.

（A）直线　　（B）圆　　（C）抛物线的一部分　　（D）椭圆

（3）已知过曲线 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=4\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）上一点 P 原点 O 的直线 PO 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则 P 点坐标是（　　）.

（A）$(3,4)$　　（B）$(\frac{3\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2})$　　（C）$(-3,-4)$　　（D）$(\frac{12}{5},\frac{12}{5})$

2．解答题：

（1）一个小虫从 $P(1,2)$ 出发，已知它在 x 轴方向的分速度是 -3，在 y 轴方向的分速度是 4，问小虫 3s 后的位置 Q.

（2）已知实数 x，y 满足方程 $(x-4)^2+(y+5)^2=9$，求 $x+y$ 的最大值，最小值.

B　组

在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上找一点，使这一点到直线 $x-2y-8=0$ 的距离为最小值.

综合练习 14

一、选择题：

1．下列变换中，（1）$\begin{cases}x=2x',\\ y=y'+1,\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=x'+5,\\ y=y'-3,\end{cases}$（3）$\begin{cases}x=1-x',\\ y=y'+1,\end{cases}$ 其中表示坐标轴平

移的是（　　）.

（A）(1)　(2)　　（B）(2) (3)　　（C）(2)　　（D）(1) (3)

2．将坐标原点平移到（-3，1）处，则曲线 $y^2-6y-2x-1=0$ 在新坐标系中的方程为（　　）.

（A）$y'^2-2x'=0$　　（B）$y'^2-4y'-2x'=0$

（C）$y'^2-8y'-2x'+16=0$　　（D）$y'^2-12y'-2x'+24=0$

3．下列点在曲线$\begin{cases}x=\sin2\theta\\y=\cos\theta+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）上的坐标是（　　）.

（A）($\frac{1}{2}$，$-\sqrt{2}$）　　（B）（$-\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$）　　（C）（2，$\sqrt{3}$）　　（D）（1，$\sqrt{3}$）

4．若直线的参数方程为$\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\end{cases}$（$t$ 为参数），则直线的斜率为（　　）.

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$-\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$-\frac{3}{2}$

5．将参数方程$\begin{cases}x=2+\sin^2\theta\\y=\sin^2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程为（　　）.

（A）$y=x-2$　　（B）$y=x+2$

（C）$y=x-2$（$2\leqslant x\leqslant 3$）　　（D）$y=x+2$（$0\leqslant y\leqslant 1$）

6．椭圆 $\begin{cases}x=3+3\cos\theta\\y=-1+5\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的两个焦点坐标是（　　）.

（A）$(-3, 5)$，$(-3, -3)$　　（B）$(3, 3)$，$(3, -5)$

（C）$(1, 1)$，$(-7, 1)$　　（D）$(7, -1)$，$(-1, -1)$

7．直线 $3x-4y-9=0$ 与圆$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$(θ 为参数)的位置关系是（　　）.

（A）相切　　（B）相离

（C）相交且直线过圆心　　（D）相交但直线不过圆心

8．椭圆$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$，关于原点对称的曲线的方程是（　　）.

（A）$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$，　　（B）$\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，

（C）$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$，　　（D）$\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

二、填空题：

1．直线$\begin{cases}x=3+4t\\y=4-5t\end{cases}$（$t$ 为参数）的斜率为______；

2．参数方程$\begin{cases}x=e^t+e^{-t}\\y=2(e^t-e^{-t})\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为________________；

3．已知直线 l_1：$\begin{cases}x=1+3t\\y=2-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）与直线 l_2：$2x-4y=5$ 相交于点 B，又点 $A(1,\ 2)$，则$|AB|=$__________；

4．直线$\begin{cases}x=2-\frac{1}{2}t\\y=-1+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长为____________.

三、求直线 l_1：$\begin{cases}x=1+t\\ y=-5+\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数）和直线 l_2：$x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点 P 的坐标，及点 P 与 Q（1，-5）的距离.

四、在椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 上找一点，使这一点到直线 $x-2y-12=0$ 的距离的最小值.

五、已知点 $P(x,y)$是圆 $x^2+y^2=2y$ 上的动点.

（1）求 $2x+y$ 的取值范围；

（2）若 $x+y+a\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

六、设椭圆$\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=2\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数)上一点 P，若点 P 在第一象限，且$\angle XOP=\dfrac{\pi}{3}$，求点 P 的坐标.

思想火花

没有千万次错误，就登不上真理的宝座.

第 15 章　逻辑代数基础

15.1　常用逻辑用语

15.1.1　命题

【学习目标】

理解命题的概念，会判断命题的真假，掌握辨别命题的方法.

【学法指导】

1．这部分内容是本章的基础，应结合具体例子进行学习，力求熟练掌握.

2．命题是可以判断真假的语句．这里的真假，主要是指正确和错误而言的．可以判断真假的语句主要是具有真假意义的陈述句．感叹句、疑问句、祈使句等都不能成为命题．例如：

（1）崂山真美啊！

（2）微山湖上莲花多吗？

（3）请勿吸烟！

例题赏析

例　判断下列语句是不是命题：

（1）$2+2=5$；

（2）$x+6=1$；

（3）3 是偶数并且 4 也是偶数；

（4）3 和 4 都是偶数；

（5）字母 a 可以代表任何数；

（6）有理数是实数；

（7）多项式不是整式；

（8）非负整数.

分析：命题代表人们进行思维时的一种判断，它总是肯定或否定某事物的某种性质（或者事物之间的某种关系）．凡是命题都有真假之分，而没有真假意义的语句都不是命题.

解：由分析可以看出：语句（1）是命题，同样语句（3）～（7）都是命题．但对于语句（2），由于不知道 x 代表什么数，因此无法判断“$x+6=1$”的真假．故语句（2）不是命题．由于语句（8）是没有真假意义的语句，故不是命题.

点拨：语句（3）和（4）表达的是同一个意思．想一想：“3 或 4 是偶数”与“3 和 4 都是偶数”表达的是同一个意思吗？

易错易混问题剖析

1．陈述句不一定是命题．例如，“他是高个子”是陈述句，但在没有明确告诉身体多高才算是高个子以前，是无法判断这句话的真假的．类似的语句还有：“大明湖是大的”、“黄河是宽的”等等.

2．在数学中经常可以见到一些含有变量的语句，如：“$a-7<0$”和“$x^2>6$”，在不知道 a 和 x 代表什么数以前，无法判断其真假，因而不是命题.

【同步训练 15.1.1】

A　组

1．判断下列语句是不是命题：

（1）$x^2\geqslant 1$；（　　）

（2）存在一个实数 x，使得 $x-1=0$；（　　）

（3）对任意实数 a，都有 $|a|<0$；（　　）

（4）明天会下雪吗？（　　）

（5）祝你身体健康！（　　）

（6）只有一组对边平行的四边形叫做梯形.（　　）

2．判断下列语句或式子是不是命题：

（1）$180°=\pi$；（　　）

（2）$3x+5>17$；（　　）

（3）到定点的距离等于定长的点的集合；（　　）

（4）一元一次方程都有解；（　　）

（5）正方形的面积 = 边长×边长；（　　）

（6）一元二次函数的图像是抛物线.（　　）

B　组

1．判断下列语句是不是命题：

（1）函数 $f(x)=2x+1$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上是增函数；（　　）

（2）函数 $f(x)=x^3$ 不是奇函数；（　　）

（3）这个函数式真简洁啊！（　　）

（4）函数 $f(x)=-x^2+1$ 与 $g(x)=|x|$ 均为偶函数；（　　）

（5）函数 $f(x)=\ x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数；（　　）

（6）函数 $f(x)=x$ 是奇函数吗？（　　）

2．判断下列命题的真假：

（1）$\{菱形\}\cap\{矩形\}=\{正方形\}$；（　　）

（2）$0\in\varnothing$；（　　）

（3）如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$；（　　）

（4）对任意集合 A, B，都有$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$；（　　）

（5）$\varnothing\subseteq\{x\mid x^2+1=0\}$；（　　）

（6）$\{x\mid x$ 是斜三角形$\}\subsetneqq\{x\mid x$ 是锐角三角形$\}$.（　　）

【知识链接】

1．仿照例子改写命题：

例：三角形内角和等于 180°．

改写：任意给一个三角形，它的内角和都等于 180°．

（1）等腰三角形的两底角相等；

改写：________________________________；

（2）平行四边形的对角线互相平分；

改写：________________________________；

（3）长方形的对角线相等；

改写：________________________________；

（4）所有含有 x^2 的函数都是二次函数．

改写：________________________________．

2．仿照例题填空：

例：原命题与改写命题分别如下：

原命题：有的三角形两条边相等．

改写后命题：存在一个三角形，它的两条边相等．

（1）原命题：有的梯形的两底角相等；

改写后命题：________________________________；

（2）原命题：有的平行四边形的对角线相等；

改写后命题：________________________________；

（3）原命题：__________________________；

改写后命题：有一个有理数 x，使得 $x-1=0$ 成立．

（4）原命题：__________________________．

改写后命题：至少有一个有理数 x，使 x^2+3 是整数．

15.1.2　量词

【学习目标】

1．了解全称量词的意义，知道常用的全称量词，会用符号“∀”表示．

2．了解全称命题的意义，会用符号表示全称命题．

3．了解存在量词的意义，知道常用的存在量词，会用符号“∃”表示．

4．了解存在命题的意义，会用符号表示存在命题．

【学法指导】

1．学习本章知识，要逐步养成用符号表示命题的习惯．因为，用自然语言表示的命题有时具有一定的歧义性，例如，“小王在火车上画画”．既可以理解为“小王在乘火车时画画”，也可以理解为“小王把画画在火车上”．究竟表达哪种意思必须根据一定的语言环境来确定．

2．应通过具体的例子和练习题，逐步掌握判定一个全称命题（或存在命题）的真假的方法．

例题赏析

例 1 用符号表示下列全称命题和存在命题：

p_1：对于任意的整数 x 和 y，$x\cdot y$ 均为整数；

p_2：对任意的有理数 m，$\frac{m}{5}$ 均为有理数；

q_1：有的有理数 x，使 $x-2.1$ 为整数；

q_2：至少有一个实数 x ，使 $x^2-4=0$ 成立．

解： p_1：$\forall x\in Z$，$y\in Z$，$x\cdot y\in Z$；

p_2：$\forall m\in Q$，$\frac{m}{5}\in Q$；

q_1：$\exists x\in Q$，$(x-2.1)\in Z$；

q_2：$\exists x\in R$，$x^2-4=0$．

例 2 判断下列全称命题和存在性命题的真假：

p_1：$\forall x\in R$，$y=2^x>0$；

p_2：$\forall x\in R$，$y=(\frac{1}{2})^x<0$；

q_1：$\exists y\in R$，$0.8^y<0$；

q_2：$\exists x\in R$，$1.7^x<1.7^3$．

分析： 要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每一个元素 x，验证 $p(x)$ 都成立；要判定一个全称命题是假命题，只要指出限定集合 M 中的一个元素 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可（这就是通常所说的“举反例”）．要判定一个存在性命题是真命题，只要在限定集合 M 中找到一个元素 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 成立即可．

解： 由指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的值域为（0，$+\infty$），可知：p_1 为真，p_2 和 q_1 为假．

因为 $1.7^2<1.7^3$，即存在 $x=2$，使 $1.7^x<1.7^3$ ，所以 q_2 为真．

点拨： 借助我们已经学习的知识，可以使我们更快地判断出命题的真假．

易错易混问题剖析

全称命题如果是真命题，对于给定集合的每一个元素都要使命题成立，防止出现以偏概全的错误．

【同步训练 15.1.2】

A 组

1．选择题：

（1）下列关系式中，前面加上“$\forall x\in \mathbf{R}$”后是真命题的为（　　）．

（A）$x^2-1>0$　　（B）$|x|\geqslant0$　　（C）$x^3>x^2$　　（D）$2^x<3^x$

（2）下列关系式中，前面加上“$\exists x\in \mathbf{R}$”后是假命题的为（　　）．

（A）$x^2-x+1>0$　　（B）$x^2-x+1=0$　　（C）$x^2-x-1=0$　　（D）$x^2+x-1=0$

（3）下列命题是真命题的是（　　）．

（A）$\forall x\in\mathbf{Q}$，$(x-3)\in\mathbf{N}$　　（B）$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2+x+1=0$

（C）$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，$x^2+y^2>0$　　（D）$\exists x\in\mathbf{Z}$，$\frac{1}{5}x$ 为自然数

2．填空题：

（1）“$\forall x \in M$，$p(x)$ 是真命题”是“$\exists x \in M$，$p(x)$ 是真命题”的________条件；

（2）语句“点 $P(x, y)$在圆 $x^2+y^2=1$ 上”加上量词后是真命题，这个量词符号是______；

（3）语句“菱形是正方形”加上量词后是假命题，这个量词符号是__________．

B　　组

1．选择题：

（1）下列关系式中，前面加上“$\forall x \in \mathbf{R}$”后是假命题的为（　　）．

（A）$\sin x \in [-1, 1]$　（B）$\cos x \in [-1, 1]$　（C）$\tan x \in \mathbf{R}$　（D）$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

（2）下列关系式中，前面加上“$\exists x, y \in \mathrm{R}$”后是假命题的为（　　）．

（A）$|x|+|y|<|x+y|$　（B）点 $P(x, y)$在 $y^2=x$ 上

（C）$x-2y+1>0$　（D）$|x|=|y|$

（3）下列命题是真命题的是（　　）．

（A）$\forall x \in$ {正方形}，$x \in$ {平行四边形}

（B）$\forall x \in$ {等腰梯形}，$x \in$ {对角线相等的四边形}

（C）$\forall x \in$ {对角线相等的四边形}，$x \in$ {矩形}

（D）$\forall x \in$ {等腰三角形}，$x \in$ {等边三角形}

2．填空题：

（1）判断命题的真假，“$\forall x \in \mathbf{R}$，$\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$”是__________；

（2）判断命题的真假，“$\exists x \in \mathbf{R}$，$\sin x\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$” 是__________；

（3）判断命题的真假，“$\forall x \in \mathbf{R}$，$\lg(x^2-2x+1)$有意义”是__________．

【知识链接】

1．$\{x \mid x^2-2x-3=0\} \cap \{x \mid x+1=0\} =$ ________________．

2．{偶数}$\cup${奇数}$=$__________．

3．若 $U=$ {实数}，$A=\{x \mid x^2-x-2>0\}$，则 $\complement_U A =$ ________________．

15.1.3　逻辑联结词

【学习目标】

1．理解命题联结词“且”、“或”、“非”的精确含义，了解复合命题，并熟记它们的真值表．

2．能够正确地写出命题的非（否定）．

【学法指导】

1．“p 且 q”的真值表可简单的理解为：“都真才真，有假则假”．

2．“p 或 q”的真值表可简单的理解为：“有真就真，都假才假”．

3．类比集合运算理解逻辑联接词：

（1）且（$\wedge$）——交（$\cap$）；

（2）或（$\vee$）——并（$\cup$）；

（3）非（$\neg$）——补（$\complement$）.

4．写复合命题“$p\wedge q$”和“$p\vee q$”的非时，要理解并记住公式：

$$\neg(p\wedge q)=\neg p\vee\neg q,\qquad \neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q.$$

例题赏析

例 若 p：$0\subseteq\{0\}$，q：$0\in\{0\}$，写出“p 且 q”和“p 或 q”，并判断真假.

分析：首先判断 p 与 q 的真值，再由复合命题 $p\wedge q$，$p\vee q$ 的真值表作出相应的判断.

解：因为 p 假 q 真，由 $p\wedge q$，$p\vee q$ 的真值表可知：“$0\subseteq\{0\}$ 且 $0\in\{0\}$”是假命题，“$0\subseteq\{0\}$或 $0\in\{0\}$”是真命题.

易错易混问题剖析

1．命题的否定与否命题的区别．对命题的否定只是否定命题的结论，而否命题既否定命题的题设又否定其结论.

2．写出一个命题的非时，要注意一些常用词的否定词，例如，“且”的否定词是“或”，“一定是”的否定为“不一定是”，“都是”的否定为“不都是”而非“都不是”．例如：

“某班全体同学都是共青团员”的非是“某班同学不都是共青团员”或者说“某班同学中至少有一位同学不是共青团员”，而不能说成“某班全体同学都不是共青团员”.

【同步训练 15.1.3】

A 组

1．选择题：

（1）下列命题是复合命题又是真命题的是（　　）.

（A）25＞10 或 25＞18

（B）若两个三角形面积相等，则这两个三角形全等

（C）2 是 $x^2-x-2=0$ 的根

（D）对顶角相等

（2）若 p 是假命题，q 是真命题，在下列命题中真命题共有（　　）.

① $\neg p$　　② $p\vee q$　　③ $p\wedge q$　　④ $\neg q$

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

（3）若 p，q 是两个简单命题，$\neg$（$p\vee q$）是真命题，则必有（　　）.

（A）p 真 q 真　　（B）p 假 q 真

（C）p 真 q 假　　（D）p 假 q 假

（4）下列各命题中，是真命题的是（　　）.

（A）若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A=\varnothing$，$B=\varnothing$

（B）两条对角线相等的四边形是正方形

（C）若 $A\cup B=U$(U 是全集)，则 $A=U$ 或 $B=U$

（D）若一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，那么这两个角互补或相等

（5）若命题“$p\vee q$”是真命题，命题“$p\wedge q$”是假命题，那么（　　）.

（A）命题 p 与 q 都是假命题　　（B）命题 p 与 q 都是真命题

（C）命题 p 与命题“$\neg q$”真值不同　　（D）命题 q 与命题“$\neg p$”真值相同

2．填空题：

（1）命题“$\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90°$，那么 $c^2=a^2+b^2$”的否命题是 ________；

（2）命题“存在实数 m，使方程 $x^2+x-m=0$ 有实根”的非是 ________；

（3）若命题“$p \vee q$”和“$\neg p$”都是真命题，则命题 q 的真值是_______；

（4）设命题 p：a，b，c 都为零，则“$\neg p$”是______________________；

（5）设命题 p：$a \cdot b \cdot c=0$，则“$\neg p$”是______________________；

（6）已知命题 p：5 是 35 的约数；q：7 是 35 的约数，则“$p \wedge q$”的真值是_____.

B　　组

1．选择题：

（1）下列句子中是真命题的是（　　）.

（A）5 不能被 2 整除且 5 能被 3 整除　　（B）5 能被 2 整除或 5 能被 3 整除

（C）5 能被 2 整除且 5 能被 5 整除　　（D）5 能被 2 整除或 5 能被 5 整除

（2）下列四个命题中的假命题是（　　）.

（A）奇数集与偶数集的并集是 Z　　（B）奇数集与偶数集的交集是 $\varnothing$

（C）奇数集在 Z 中的补集是偶数集　　（D）两个奇数的和是奇数

2．解答题：对于下列命题 p 和 q，试分别写出相应的 $p \wedge q$ 和 $p \vee q$，并判断其真假：

（1）已知命题

p：$6=1$；　　q：$2=2$；

（2）已知命题

p：$3>5$；　　q：$3=5$.

【知识链接】

1．任意写出：一个整数、一个纯小数、一个混合小数，并分别说出其每一位上的数码符号所代表的值.

2．想一想：在十进制中，整数的进位规律是什么？

15.2　数　　制

15.2.1　十进制与二进制

【学习目标】

1．理解数制与编码，了解进位计数制应有的三个要素；

2．会把二进制数与十进制数按权展开.

【学法指导】

1．十进制数是我们已经熟悉的，这也是我们学好数制与二进制数的有利条件，应充分运用这一点来学好本节知识.

2．十进制数的按权展开，是学习二进制数按权展开的基础.

3．不论是把二进制数还是十进制数按权展开，只需记住 $a^0=1$（此处，a 为 2 或者 10），

即个位上的数字乘上 a^0，其他依次排列即可，如：

$(123456.789)_{10}$
$=1\times10^5+2\times10^4+3\times10^3+4\times10^2+5\times10^1+6\times10^0+7\times10^{-1}+8\times10^{-2}+9\times10^{-3}$.

例题赏析

例 把下列各数按权展开：

（1）$(2673.518)_{10}$； （2）$(1101.11)_2$.

分析：把十进制（二进制）数按权展开的关键是要弄清各位上数的权.

解：（1）$(2673.518)_{10}=2\times10^3+6\times10^2+7\times10^1+3\times10^0+5\times10^{-1}+1\times10^{-2}+8\times10^{-3}$；

（2）$(1101.11)_2=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}$.

易错易混问题剖析

二进制数只有 0 和 1 这两个数码，没有 2．要注意掌握它的进位规律是“逢二进一”，不能与十进制数混淆.

【同步训练 15.2.1】

A　组

1．把下列十进制数按权展开：

（1）$(27)_{10}$； （2）$(638)_{10}$； （3）$(863.91)_{10}$；

（4）$(1963.023)_{10}$； （5）$(18056.5)_{10}$； （6）$(10670.301)_{10}$.

2．把下列二进制数按权展开：

（1）$(111)_2$； （2）$(1110)_2$； （3）$(101.11)_2$；

（4）$(1001.01)_2$； （5）$(1010.101)_2$； （6）$(10011.001)_2$.

B　组

1．任意写出 3～5 个十进制数，请同学写出它们的按权展开式.

2．任意写出 3～5 个二进制数，请同学写出它们的按权展开式.

【知识链接】

1．计算可知，$1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}=$________________，得到的数依旧是二进制吗？又（1101.11）$_2=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}$，由此可知，二进制数（1101.11）$_2$ 可以转化为十进制数__________.

2．根据第 1 题想一想，如何把二进制数转换成十进制数？

15.2.2　二进制与十进制之间的转换

【学习目标】

掌握二进制数与十进制数的相互转换.

【学法指导】

1．将二进制数转换成十进制数时，先将二进制数按权展开，然后按十进制加法规则求和，即可得到相应的十进制数.

2．任何一个十进制数都可以将其整数部分和纯小数部分分开，分别用“除 2 取余法”和“乘 2 取整法”化成二进制数形式，然后将二进制形式的整数和纯小数合并即得到该十进制数所对应的二进制数.

例题赏析

例 1　将二进制数 11011100.11 转换成十进制数.

解：$(11011100.11)_2=2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+2^{-1}+2^{-2}$

$=128+64+16+8+4+0.5+0.25$

$=(220.75)_{10}$.

所以　$(11011100.11)_2=(220.75)_{10}$.

例 2　把十进制数 13.562 转换成二进制数（保留五位小数）：

解：第一步：先把整数 13 转换成二进制数；

	余数	
2 | 13		自下向上读数 ↑
2 | 6	1	
2 | 3	0	
2 | 1	1	
0	1	

所以　$(13)_{10}=(1101)_2$.

第二步：将纯小数 0.562 转换成保留五位小数的二进制小数.

	整数	
0.562		自上向下读数 ↓
× 2		
$\boxed{1}$.124	1	
× 2		
0.248	0	
× 2		
0.496	0	
× 2		
0.992	0	
× 2		
$\boxed{1}$.984	1	

取整后由高位向低位排得：$(0.562)_{10}\approx(0.10001)_2$；

所以　$(13.562)_{10}\approx(1101.10001)_2$.

易错易混问题剖析

将十进制数化成二进制时，要注意“整数部分除 2 取余逆序”，“小数部分乘 2 取整顺序”，不要将法则混淆.

【同步训练 15.2.2】

A　组

1．将下列二进制数转换为十进制数：

（1）$(11001011)_2$；　（2）$(101010.101)_2$；　（3）$(0.0011)_2$.

2．将下列十进制数转换为二进制数：

（1）$(145)_{10}$；　（2）$(27.325)_{10}$；　（3）$(0.897)_{10}$.

3．将下列十进制数转换为二进制数：

（1）$(26)_{10}$；　（2）$(45)_{10}$；　（3）$(74)_{10}$；

（4）$(129)_{10}$；　（5）$(356)_{10}$；　（6）$(254.25)_{10}$.

B　组

1．将下列二进制数转换成十进制数.

（1）$(1101)_2$；　（2）$(10101)_2$；　（3）$(110101)_2$；

（4）$(1110101)_2$；　（5）$(10100110)_2$；　（6）$(11111111)_2$.

2．完成下列不同数制间的转换.

（1）$(154)_{10}=(\qquad\qquad)_2$；　（2）$(101011)_2=(\qquad\qquad)_{10}$.

3．把下列十进制数转换成二进制数(保留四位小数)：

（1）$(127)_{10}$；　（2）$(2004.15)_{10}$；

（3）$(52.675)_{10}$；　（4）$(68.325)_{10}$.

【知识链接】

1．函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域是__________，值域是__________.

2．如果函数 $y=x$ 的定义域是$\{0，1\}$，则函数的值域是__________.

15.3　逻 辑 代 数

15.3.1　基本概念与基本逻辑运算

【学习目标】

1．了解逻辑代数的基本概念；
2．能够写出逻辑运算的真值表；
3．理解三种基本逻辑运算与、或、非的定义及运算法则.

【学法指导】

1．要理解逻辑代数运算不同于普通代数运算，任意一个变量只能取 0，1 两个数值，而普通代数的变量通常可以取更多的值.

2．需要特别注意的是，两个变量的与、或逻辑运算只有四种状态，因此它们的真值表只有四个状态下的定义．变量的非逻辑运算只对两种状态定义．可以利用排列组合的知识，分析多个变量的逻辑运算真值表的不同状态的个数.

3．学习过程中，要始终将逻辑运算与、或、非和三个逻辑联结词联系，进行对比；在学习逻辑运算法则时，可以类比普通代数运算法则，利于记忆.

例题赏析

例　如图 5-1 所示下列三个电路中，当 S_1 闭合且 S_2 断开时，能使灯 FU 亮的电路是（　　）.

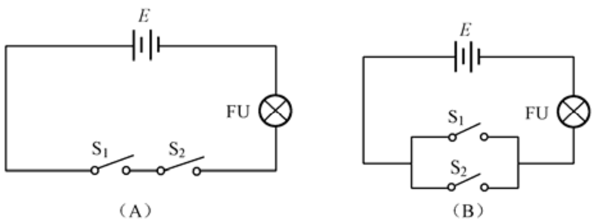


图 15-1

解：B.

易错易混问题剖析

普通代数中，0 和 1 都是实数，$1+1=2$，而在逻辑代数中，0 表示假，1 表示真，故有 $1+1=1$，而不等于 2.

【同步训练 15.3.1】

A　组

1．填空题：

（1）逻辑代数又称为 ____ 代数，逻辑代数中有____，_____，____三种基本逻辑运算.

（2）设 A，B 是两个逻辑变量，则用________ 表示逻辑与，用_________ 表示逻辑或，用 表示逻辑 A 的非.

2．设 A，B，C 是逻辑变量，根据与、或、非的运算法则填写真值表：

（1）

A	B	$\overline{B}$	$A\cdot\overline{B}$

（2）

A	B	C	$B+C$	$A\cdot(B+C)$

B 组

1．填空题：

1 个逻辑变量的取值只有___ 和___两种情况，两个逻辑变量有 ____，____，____，____四种取值组合，三个逻辑变量有________种取值组合，n 个自变量有__________种取值组合．

2．用真值表证明下列式子：

（1）$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$；

A	B	C	$A\cdot(B+C)$	$A\cdot B+A\cdot C$

（2）$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$．

A	B	C	$A+B\cdot C$	$(A+B)\cdot(A+C)$

【知识链接】

设集合 A，B，则 $A\cap A=$___，$A\cup A=$___，$\complement_U(A\cup B)=$___，$\complement_U(\complement_U A)=$___.

15.3.2　逻辑代数的运算律和基本定理

【学习目标】

1．熟记逻辑代数的九组基本公式和四个基本定理；
2．能够运用基本公式和基本定理完成简单的逻辑化简运算.

【学法指导】

1．逻辑代数的基本公式直接呈现出来，并没有进行严格的推导证明，在教师指导下利用真值表进行验证，有利于理解和记忆基本公式．本节的学习是以后学好逻辑代数的前提.

2．对于基本定理的证明，最直接的方法是用真值表法，在列出变量所有取值的情况下，计算等号两边的逻辑值，相等则等式成立.

3．逻辑代数的逻辑运算规律是在基本公式之后呈现的，目的是为了用基本公式证明基本定理，在证明基本定理过程中，注意体会逻辑化简运算，为后面的逻辑函数的化简打基础.


例题赏析

例 1　验证反演律　$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ 和　$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

解：列出表达式等号两边的真值表，如下表所示.

证明反演律的真值表

A	B	AB	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

可看出，在 A, B 所有取值情况下，等号两边的值均相等，则摩根定律成立.

例 2　化简：$\overline{A\overline{B}}+\overline{\overline{A}C}$.

解：方法一：由公式　$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$,

可知　$\overline{A\overline{B}}+\overline{\overline{A}C}=\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{A}}+\overline{C}=1+B+\overline{C}=1$.

方法二：由公式 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$,

可知　$\overline{A\overline{B}}+\overline{\overline{A}C}=\overline{A\overline{B}\,\overline{A}C}=\overline{0}=1$.

【同步训练 15.3.2】

A　组

1．默写逻辑代数的逻辑运算律：

序号	运算律	公　式	
1	0–1 律		
2	自等律		
3	重叠律		
4	互补律		
5	交换律		
6	结合律		
7	分配律		
8	反演律		
9	还原律		

2．选择题：

（1）$A\cdot\overline{A}=$（　　）.

（A）A　　（B）$\overline{A}$　　（C）0　　（D）1

（2）$A+\overline{A}=$（　　）.

（A）A　　（B）$\overline{A}$　　（C）0　　（D）1

（3）$\overline{A\cdot B}=$（　　）.

（A）$A\cdot B$　　（B）$\overline{A}\cdot\overline{B}$　　（C）$A+B$　　（D）$\overline{A}+\overline{B}$

（4）$\overline{A+B}=$（　　）.

（A）$A\cdot B$　　（B）$\overline{A}\cdot\overline{B}$　　（C）$A+B$　　（D）$\overline{A}+\overline{B}$

3．化简下列各式：

（1）$\overline{A}B+AB$;

（2）$\overline{A}+\overline{A}BC$;

（3）$A+B+\overline{A}\overline{B}$;

（4）$(A+\overline{B})(B+\overline{C})(C+\overline{A})$;

（5）$\overline{A+B+C}$.

B　组

1．填空题：

基本定理 1　$AB+A\overline{B}=$ ________ ；

基本定理 2　$A+AB=$ ________ ；

基本定理 3　$A+\overline{A}B=$ ________ ；

基本定理 4　$AB+\overline{A}C+BC=$ ________ .

2．选择题：

（1）下列逻辑代数基本运算关系式中正确的是（　　）.

（A）$A+A=2A$　　（B）$A\cdot A=A^2$　　（C）$A+0=A$　　（D）$A+1=A$

（2）$A+BC=$（　　）.

（A）$A+B$　　（B）$A+C$　　（C）$(A+B)(A+C)$　　（D）$B+C$

（3）$\overline{A}+\overline{B}=$（　　）.

（A）$\overline{A+B}$　　（B）$\overline{A\cdot B}$　　（C）$A+B$　　（D）$A\cdot B$

（4）$\overline{A}\cdot\overline{B}=$（　　）.

（A）$\overline{A+B}$　　（B）$\overline{A\cdot B}$　　（C）$A+B$　　（D）$A\cdot B$

（5）下列说法正确的是（　　）.

（A）已知逻辑函数 $A+B=A+C$，则 $B=C$

（B）已知逻辑函数 $AB=AC$，则 $B=C$

（C）已知逻辑函数 $A+B=AB$，则 $A=B$

（D）已知逻辑函数 $A+B=A$，则 $B=1$

3．化简下列各式：

（1）$A+B+C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（2）$\overline{A}B\overline{C}+A+\overline{B}+C$；

（3）$A\overline{B}+B+\overline{A}B$；

（4）$\overline{A+B}\cdot\overline{A\overline{B}}$.

【知识链接】

1．设逻辑变量 $A=B=1$，则$\overline{A}=$________，$\overline{A}B=$________.

2．设逻辑变量 $A=B=C=1$，则$\overline{A}\overline{B}\overline{C}=$________，$AB\overline{C}=$________.

15.3.3　逻辑函数

【学习目标】

1．了解逻辑函数的概念、逻辑函数的最小项以及其逻辑相邻的含意；

2．理解最小项的性质.

【学法指导】

1．本节的逻辑函数是多元变量的函数，要理解逻辑函数的自变量取值和函数值只能是 0 和 1 两个值.

2．函数最小项是以后化简逻辑函数表达式和使用卡诺图化简的基础．在学习之前，认真复习二进制数与十进制数的转换，为学习函数最小项扫除一个障碍.

例题赏析

例　写出三变量 A, B, C 的逻辑函数最小项，并写出 m_3 的逻辑相邻项.

分析：若两个最小项只有一个因子不同而其他因子相同，则称这两个最小项是逻辑相邻的．写出三变量的所有逻辑函数最小项，根据逻辑相邻的定义写出 m_3 的逻辑相邻项.

解：三变量 A, B, C 的逻辑函数最小项有$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}BC$，$A\overline{B}\overline{C}$，$A\overline{B}C$，$AB\overline{C}$，$ABC$.

$m_3=\overline{A}BC$，由逻辑相邻的定义可知，与 m_3 的逻辑相邻项分别是 ABC，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}B\overline{C}$，即

m_7，m_5，m_6.

【同步训练 15.3.3】

A　组

1．完成下列表格.

三变量的最小项的编号

A	B	C	最小项	代号
				m_0
0	0	1		
			$\overline{A}B\overline{C}$	
				m_3
1	0	0		
			$A\overline{B}C$	
				m_6
			ABC	

2．填空题：

（1）逻辑函数的自变量取值和函数值只能是 ______ 和 ______ 两个值;

（2）全体最小项的“或”运算结果为 ____ ，任意两个最小项的“与”运算结果为 ___ ，两个逻辑相邻的最小项的“或”可以合并成一个“与”项，并消去____ 个因子.

B　组

1．填空题：

（1）已知 $Y=A\overline{B}+C$，当 $A=1$，$B=0$，$C=0$ 时，函数值 $Y=$ ________ ；

（2）已知 $Y=\overline{A}\overline{B}+\overline{A}C+ABC$，当 $A=0$，$B=1$，$C=1$ 时，函数值 $Y=$ ________ .

2．写出二变量 A，B 的逻辑函数最小项，并写出 m_3 的逻辑相邻项.

3．写出四变量 A，B，C，D 的逻辑函数最小项，并写出 m_1 的逻辑相邻项.

【知识链接】

作出函数 $F=A(\overline{B}+C)$的真值表.

15.3.4　逻辑函数表示方法

【学习目标】

1．了解表达式的概念，了解常用的逻辑函数表达式及其运算;

2．了解标准“与—或”表达式的概念;

3．理解卡诺图，会进行四变量以内的逻辑函数的真值表、表达式、卡诺图的互化．

【学法指导】

1．本节所列出的常用的逻辑函数表达式不要求识记掌握，但要了解各种常用逻辑函数表达式的运算过程，以及函数 Y 的取值情况．

2．对于求逻辑函数的函数值，给出两类情况，一类是指定逻辑变量取值（0 或 1），求函数值，需要用到三个基本逻辑运算（与、或、非）的运算法则；另一类是写出逻辑函数的真值表，需要用到三个基本逻辑运算（与、或、非）的真值表，学习中要注意它们的区别．

3．卡诺图的引入是为下一节逻辑函数表达式的化简提供一个简捷的工具．这就要求能够熟练地进行逻辑函数表达式、真值表、最小项表达式以及卡诺图的相互转换，其关键在于对逻辑函数的最小项掌握．

例题赏析

例　将逻辑函数 $F(A,B)=A+\bar{B}$ 表示为最小项表达式．

解：真值表：

A	B	F
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	1

$F(A,B)=A+\bar{B}=\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+AB$.

易错易混问题剖析

卡诺图中小方格中的最小项必须是逻辑相邻的．例如在教材表 16-18（2）中，m_0，m_1 之后不是 m_2，而是 m_3．

【同步训练 15.3.4】

A　组

1．默写常用的逻辑函数表达式：

逻辑关系	表达式	逻辑关系	表达式
与		与非	
或		或非	
非		与或非	
与或		异或	
或与		同或	

2．选择题：

（1）逻辑函数的表示方法中具有唯一性的是（　　）．

（A）真值表和卡诺图　　（B）表达式和卡诺图

（C）真值表和逻辑图　　（D）表达式和逻辑图

（2）在下列哪种输入情况下，“与非”运算的结果是逻辑 0（　　）．

（A）全部输入是 0　　（B）任一输入是 0

（C）仅一输入是 0　　　　　　　　　（D）全部输入是 1

（3）在下列哪种输入情况下，“或非”运算的结果是逻辑 1（　　）.

（A）全部输入是 0　　　　　　　　　（B）全部输入是 1

（C）任一输入为 0，其他输入为 1　　（D）任一输入为 1

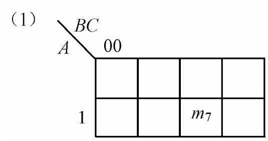
3．写出逻辑函数 $Y=\overline{A}+A\overline{B}$ 的真值表.

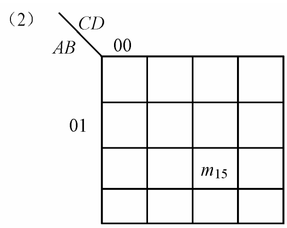
A	B	$\overline{A}+A\overline{B}$

4．已知逻辑函数真值表如下表所示，试写出相应逻辑函数“与－或”表达式.

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

5．完成下列卡诺图：





6．画出第 4 题的逻辑函数的卡诺图.

B　组

1．画出下列逻辑函数的卡诺图.

（1）$F(A，B)=\overline{A}B+AB$;

（2）$F(A, B, C)=A\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}$;

（3）$F(A，B)=\overline{A}+AB$;

（4）$F(A, B, C)=A\overline{B}C+\overline{A}C+AB\overline{C}$.

2．画出下列逻辑函数的卡诺图.

（1）F（A，B，C）$=A\overline{C}+\overline{B}+ABC$;

（2）$F(A，B)\ =B$;

（3）F（A，B，C）$=B$;

（4） F（A，B，C，D）$=B$.

【知识链接】

求函数 F（A，B，C）$=AB+B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$的最小项表达式.

15.3.5　逻辑函数的化简

【学习目标】

1．理解常用的几种逻辑函数的代数化简方法，并能综合应用化简逻辑函数；

2．理解逻辑函数的卡诺图化简法的圈“1”的方法，能利用卡诺图化简逻辑函数.

【学法指导】

1．公式法化简逻辑函数的优点是简单方便，对逻辑函数式中的变量个数没有限制，它适用于变量较多，较复杂的逻辑函数的化简．它的缺点是需要熟练掌握和灵活运用逻辑代数的基本

定律和基本公式，而且还需要有一定的化简技巧．另外，公式法化简也不易判断所得到的逻辑函数是不是最简式．

2．几种基本的公式法化简方法，即并项法、吸收法、消去法和配项法，都适合“代入规则”，也就是说，在各种方法中所涉及的变量也可以代表任何复杂的逻辑函数表达式．

3．相比代数化简法，运用卡诺图对逻辑函数进行化简显得直观．卡诺图是真值表的一种变换，比真值表更明确地表示出了逻辑函数的内在联系，使用卡诺图可以避免烦琐的代数运算．

4．卡诺图的化简原理是通过把卡诺图上表征相邻最小项的相邻小方格“圈”在一起进行合并，达到用一个简单“与”项代替若干最小项的目的．

例题赏析

例 1　化简函数 $F=(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(B+C)(\overline{A}+C)$.

解：$F=(A\overline{A}+AB+\overline{B}A+\overline{B}B)(B\overline{A}+BC+C\overline{A}+CC)$

$=(AB+\overline{A}\overline{B})(\overline{A}B+C)$

$=AB\overline{A}B+ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}C$

$=ABC+\overline{A}\overline{B}C$.

例 2　用卡诺图化简逻辑函数 $F=AD+A\overline{B}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$.

分析：画出函数卡诺图后用最大的圈复盖函数最小项，注意四角是相邻的项，每个圈中至少要有一个没有圈过的最小项．

解：由表达式画出卡诺图，画包围圈合并最小项，得到简化的与—或表达式 $F=AD+\overline{B}\overline{D}$.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01				
11		1	1	
10	1	1	1	1

易错易混问题剖析

卡诺图的化简原理是通过把卡诺图上表征相邻最小项的相邻小方格“圈”在一起进行合并，这里的“相邻”要注意卡诺图卷起时相邻的情形，由不同的画“圈”法可能得到的结果形式不同，但最小项表达式完全一样，达到用一个简单“与”项代替若干最小项的目的．

【同步训练 15.3.5】

A　组

1．填空题：

逻辑函数表达式代数化简的常用方法．（1）并项法：$A\cdot B+A\cdot\overline{B}=$ ______；（2）吸收法：$A+AB=$ ______；（3）消去法：$A+\overline{A}B=$ ______；（4）配项法：$A+A=$ ____，在化简复杂的逻辑函数时，常常需要综合应用上述几种方法．

2．选择题：

（1）已知逻辑函数 F（A，B，C）$=AB+\overline{A}C+\overline{B}C$，与其相等的函数为（　　）．

（A）$F = AB$ （B）$F = AB + \bar{A}C$ （C）$F = AB + \bar{B}C$ （D）$F = AB + C$

（2）逻辑函数 $F = BCD + BC + ACD + ABC$，与其相等的函数为（ ）.

（A）$F = BC + ACD$ （B）$F = D + ADC + ABC$

（C）$F = ABC$ （D）$F = BC + AC + ADB$

3．用代数化简法把下列逻辑函数式化简为最简与—或表达式.

（1）$Y = \bar{A}\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A} + \bar{B} + ABC$ ；

（2）$Y = A\bar{B} + \bar{A}C + BC + \bar{C}D$ ；

4．用卡诺图化简法化简下列逻辑函数.

（1）$Y = A\bar{B} + ACD + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}CD$;

（2）$Y = AB + AB\bar{C} + ABD + AB(\bar{C} + \bar{D})$.

B 组

1．选择题：

（1）下列说法错误的是（ ）.

（A）逻辑函数的表达方法有真值表、逻辑表达式、逻辑图和卡诺图

（B）真值表是将逻辑函数的最小项按一定规律排列成正方行或矩形

（C）有了某函数的一种表示方法，就可以转换成其他表示方法

（D）有电路的分析设计中，一般先列写真值表，再根据真值表列写出函数关系式

（2）在四变量卡诺图中，逻辑上不相邻的一组最小项为（ ）.

（A）m_1 与 m_3 （B）m_4 与 m_6

（C）m_5 与 m_{13} （D）m_2 与 m_8

2．用卡诺图化简法把下列逻辑函数式化简.

（1）$Y = AB + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}CD + \bar{A}BCD$;

（2）$Y = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B$ ；

（3）$Y=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}+\overline{A}D+C+BD$；

（4）$Y(A,B,C)=m_0+m_1+m_2+m_4+m_5+m_6$；

（5）$Y(A,B,C,D)=m_1+m_3+m_5+m_7+m_9+m_{11}+m_{13}+m_{15}$.

【知识链接】

代数法化简：

（1）$Y=A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$ ；

（2）$Y=AB+ACD+\overline{A}B+\overline{A}CD$.

15.3.6　逻辑图

【学习目标】

了解与、或、非、与非、或非、与或非、异或和异或非等对应的逻辑元件图形符号，能进行简单的逻辑图与相应的逻辑函数表达式的转换.

【学法指导】

1．逻辑图是采用规定的图形符号，来构成逻辑函数运算关系的网络图形，也就是用逻辑符号表示变量逻辑关系或基本单元电路的符号图，其特点是接近实际电路.

2．熟记常用逻辑元件图形符号.

例题赏析

例　某逻辑函数的逻辑图如图 15-2 所示，试写出该逻辑函数表达式并化简.

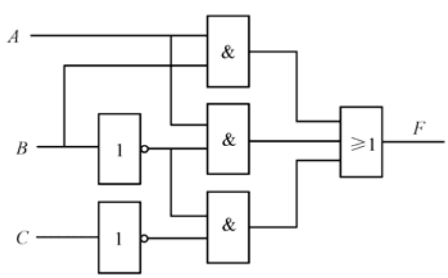


图 15-2

分析　本题可在写出电路的逻辑表达式并化简后列出真值表，根据逻辑图写逻辑表达式的方法是：从输入端到输出端，逐级写出各个门电路的逻辑表达式，最后写出各个输出端的逻辑表达式.

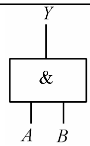
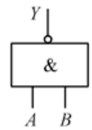
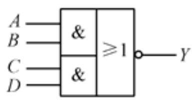
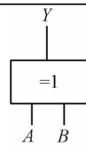
解　由逻辑图可知　$F=AB+A\overline{B}+\overline{B}\overline{C}=A+\overline{B}\overline{C}$.

【同步训练 15.3.6】

A　组

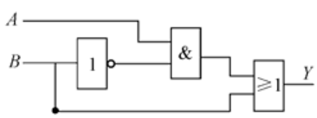
1．填表：

常用逻辑元件图形符号与逻辑运算符号

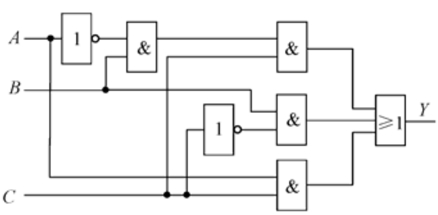
运算				
表达式		$Y=A+B$	$Y=\overline{A}$	
图形符号				
运算		与或非		
表达式	$Y=\overline{A+B}$			$Y=AB+\overline{A}\overline{B}$
图形符号				

2．写出各逻辑图的逻辑函数式，并化简为最简式“与或”式.

（1）



（2）



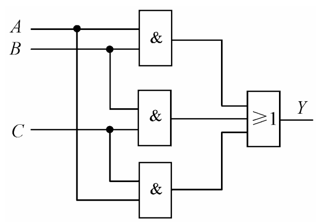
3．根据下列各逻辑式，画出函数的逻辑图.

（1）$F(A,B,C)=A+BC$；　　　（2）$F(A,B,C)=AB+\overline{A}\overline{B}$.

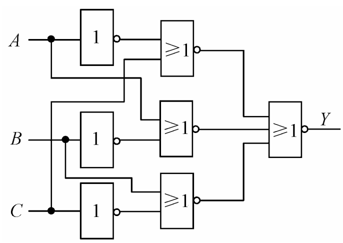
B　　组

1．写出各逻辑图的逻辑函数式，并化简为最简式与－或式.

（1）



（2）



2．根据下列各逻辑式，画出函数的逻辑图.

（1）$F(A, B, C) = (\overline{A} + B)C$;

（2）$F(A, B, C) = AB + \overline{B}C$.

3．在举重比赛中，有甲、乙、丙三名裁判，其中甲为主裁判，乙、丙为副裁判，当主裁判和一名以上（包括一名）副裁判认为运动员上举合格后，才可发出合格信号．试建立该逻辑函数并列出真值表.

综合练习 15

一、选择题：

1．下列语句是命题的是（　　）.

（A）今天天气真好！　　（B）最近身体好吗？

（C）0 不是奇数.　　（D）祝你好运！

2．下列命题是真命题的是（　　）.

（A）$1 + x > 3$.　　（B）1 是质数.

（C）感叹句不是命题.　　（D）祈使句有可能是命题.

3．下列命题是真命题的是（　　）.

（A）$1 \notin \mathbf{Z}$　　（B）$0 \in \mathbf{N}$.

（C）$(100)_2 > (10)_{10}$　　（D）$\cos 30° < \sin 30°$.

4．下列语句是全称命题的是（　　）.

（A）所有的人都参加这次活动吗？　　（B）有的人不参加这次活动.

（C）所有的自然数都是整数.　　（D）祝所有人幸福快乐！

5．命题“$3 \geqslant 2$”的含义是（　　）.

（A）$3>2$.　　（B）$3>2$ 或 $3=2$.　　（C）$3>2$ 且 $3=2$.　　（D）$3=2$.

6．下列式子加上存在性量词是真命题的是（　　）.

（A）$x^2<0$　　（B）$x+5>0$　　（C）$|x|-1<-1$　　（D）$x^2-2x+3<0$

7．下列命题是真命题的是（　　）.

（A）$7>8$ 且 $3=2$.　　（B）$7>8$ 且 $3<2$.

（C）$7<8$ 且 $3>2$.　　（D）$7<8$ 且 $3<2$.

8．下列四个句子中不是命题的是（　　）.

（A）3 乘 2 等于 6.　　（B）π 是无理数.

（C）你喜欢数学吗？　　（D）$\sqrt{2}$ 是有理数.

9．下列命题中，是假命题的是（　　）.

（A）设 x，$y \in$ N，若 $x+y$ 是偶数，则 x，y 都是偶数.

（B）若 $x>1$，$y>1$，则 $x+y>2$.

（C）若 $x>2$，则 $x^2>4$.

（D）菱形的对角线互相垂直.

10．十进制数 19.125 转换成二进制数为（　　）.

（A）10011.001　　（B）11011.101　　（C）11001.101　　（D）1001.001

11．以下表达式符合逻辑运算法则的是（　　）.

（A）$C\,C=C^2$　　（B）$1+1=10$　　（C）$0<1$　　（D）$A+1=1$

12．符合逻辑与运算法则的是（　　）.

（A）$1 \cdot 0=0$　　（B）$1+0=1$　　（C）$1 \cdot 1=0$　　（D）$0 \cdot 1=1$

13．下列各式是四变量 A，B，C，D 函数的最小项的是（　　）.

（A）$A\overline{B}C$　　（B）$A\overline{B}C\overline{D}$　　（C）$A\overline{B}+CD$　　（D）$(\overline{A}+B)(C+D)$

14．最小项 $A\overline{B}CD$ 可计为（　　）.

（A）m_{10}　　（B）m_{11}　　（C）m_{12}　　（D）m_{13}

15．逻辑函数 $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$ 的逻辑相邻项是（　　）.

（A）$A\overline{B}C\overline{D}$　　（B）$A\overline{B}\overline{C}D$　　（C）$\overline{A}B\overline{C}D$　　（D）$ABC\overline{D}$

二、填空题：

1．命题“存在一个实数 x，使得 $x^2=1$”的非是 ______________________；

2．若 p：$\exists x \in \mathbf{R}$，$x>2$；q：$\exists x \in \mathbf{R}$，$x=2$，则 $p \vee q$ 是 ________________；

3．若 p：$\forall x \in \mathbf{R}$，$x>3$，q：$\forall x \in \mathbf{R}$，$x<5$，则 $p \wedge q$ 是 ________________；

4．若 p：$\forall x \in \mathbf{R}$，x 是奇数，q：$\forall x \in \mathbf{R}$，x 是偶数，则 $p \vee q$ 是______________；

5．当逻辑函数有 n 个变量时，变量的取值组合共有______个．

三、解答题：

1．已知命题 p：某班同学不都是共青团员；q：某班同学都是女生．
分别写出 $p \vee q$，$p \wedge q$，$\neg p$，$\neg q$．

2．把下列各数按权展开：

（1）$(273.18)_{10}$；　　（2）$(11101.0011)_2$．

3．将下列十进制的数转换为二进制的数：

（1）$(128.32)_{10}$；　　（2）$(101.11)_{10}$．

4．用公式化简下列逻辑函数．

（1）$L = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$

（2）$L = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD + A\overline{B}EF + \overline{B}EF$

5．已知真值表如下所示，试写出对应的逻辑表达式．

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

6．用卡诺图化简逻辑函数

L（A，B，C，D）$= m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 + m_{10} + m_{11} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$．

思想火花

方法完全在于对我们必须加以注意的事物给以适当的整理、分类，使之条理化.

第 16 章　算法与程序框图

16.1　算法的概念和描述

16.1.1　算法的概念

【学习目标】

1．接触几个算法的案例，初步了解算法的思想和概念；

2．通过对解决问题的过程与步骤的分析，初步学习用自然语言描述算法.

【学法指导】

1．所谓“算法”就是解题方法的精确描述．从广义的角度来看，并不是只有“计算”的问题才有算法，实际生活中常见的问题都包含着算法，学习时多与同学一起讨论、研究解决问题的步骤，并用较为条理的语言进行描述．以培养算法思想，提高逻辑思维能力.

2．要注意算法的三个特性：

（1）有穷性：一个算法必须在执行有穷步之后完成.

（2）确定性：算法中的每一个步骤，都必须有确切的含义，在他人理解时不会产生二义性.

（3）可执行性：算法中的每一个步骤，都可以通过已有的基本操作来执行，并得到确定的结果.

例题赏析

例 1　你要乘火车去外地办一件急事，请你写出从自己房间出发到坐在火车车厢内的三步主要算法.

解：从自己房间出发去坐火车，需要如下三个主要步骤：

第一步：去车站；

第二步：买车票；

第三步：凭票上车对号入座.

例 2　在某档节目中，有一个猜商品价格的游戏：竞猜者如在规定的时间内大体猜出某种商品的价格，就可获得该件商品．现有一商品，价格在 0～8 000 元之间，采取怎样的策略才能在较短的时间内大体猜出该商品的价格呢?

解：我们采取下面的方法来猜测商品的价格：

第一步：报“4 000”；

第二步：若主持人说高了(说明答案在 0~4 000 之间)，就报“2 000”，否则（答数在 4 000～8 000 之间）报“6 000”;

第三步：重复第二步的报数方法取中间数，直至得到正确结果.

点拨：若把 0～8 000 看作区间[0，8 000]，则此算法可以看成报出区间的“中点”，用这个“中点”与区间的一个端点构成新的区间，如[0，4 000]、[2 000，4 000]等，这样不断地缩小区间，逐渐逼近正确答案.

易错易混问题剖析

算法具有不唯一性，对于同一个问题可以有不同的算法．例如，例 2 还可以从 8000 开始，逐渐减去适当的数（如 1 元 1 元地减），直至得到满意的结果，但这种方法一般比较烦琐．因此，我们研究算法的目的，是找出更简洁的解决问题的办法，找出能够让计算机代替我们工作的算法.

【同步训练 16.1.1】

A　组

1．填空题：

（1）算法可以理解为由________________所构成的完整的解题步骤，并且这样的步骤能够解决一类问题；

（2）已知一个学生的语文成绩为 89，数学成绩为 96，外语成绩为 99，德育成绩为 96．求他的总成绩和平均成绩的一个算法为：

第一步： 取 A=89，B=96，C=99，D = 96;

第二步： ____________________;

第三步： ____________________;

第四步： 输出计算的结果.

2．著名数学家华罗庚“烧水泡茶”的两个算法为：

算法一：

第一步：烧水；

第二步：水烧开后，洗刷茶具；

第三步：沏茶.

算法二：

第一步：烧水；

第二步：烧水过程中，洗刷茶具；

第三步：水烧开后沏茶.

这两个算法的区别在哪里？哪个算法更高效？为什么？

B　组

1．现有 A，B，C 三个大小相同的杯子，其中，A 杯盛水，B 杯盛酒，C 杯空着，试写出交换 A，B 两个杯子中液体的一个算法.

2．已知变量 x，y 的值，试写出交换两个字母的值的方法．

【知识链接】

现有一个容量为 8 升的桶，装满了水，另外有容量为 3 升和 5 升的空桶各一个，准备将水分成相等的两份，试设计一个算法完成这项任务．

16.1.2　算法的描述

【学习目标】

1．通过对解决问题过程与步骤的分析，体会算法的思想，初步了解算法的概念和算法的特征；

2．了解算法的几种描述方法，能说明解决简单问题的算法步骤．

【学法指导】

算法是解决某个特定问题的一种方法或一个有限过程．设计算法的注意事项是：

（1）认真分析问题，抽象出相应的数学模型；

（2）综合考虑此类问题中可能涉及的各种情况；

（3）借助有关的变量或参数表达算法的主要部分；

（4）将解决问题的过程划分为若干个步骤；

（5）选用适当的描述方式，用简练的语言将各个步骤依次表示出来．

例题赏析

例 1 按从小到大的顺序重新排列 x，y，z 三个数值．

解：我们用自然语言对算法进行描述：

S1：输入 x，y，z 三个数值；

S2：从三个数值中挑选出最小者并交换到 x 中；

S3：从 y，z 中挑选出较小者并交换到 y 中；

S4：输出 x，y，z 的值．

例 2 下面给出一个问题的算法：

S1：输入 x；

S2：若 $x\geqslant4$，则执行 $2x-1$，否则执行 x^2-2x+3.

问题：（1）这个算法解决的问题是什么？

（2）当输入的 x 值为多大时，输出的数值最小？

解：（1）这个算法解决的问题是求分段函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\geqslant4\\ x^2-2x+3 & x<4\end{cases}$ 的函数值问题．

（2）当 $x\geqslant4$ 时，$f(x)=2x-1\geqslant7$；当 $x<4$ 时，$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant2$；因

此，$f(x)_{\min}=2$，此时 $x=1$，即当输入的 x 值为 1 时，输出的数值最小.

点拨：给定一个问题，我们要能写出解决问题的算法；给定一个算法，我们也要知道它能解决哪一类问题，要从 S1 开始逐步往下分析.

例 3 一位商人有 8 枚银元，其中有 1 枚略轻的是假银元．你能用天平（无砝码）将假银元找出来吗？写出解决这一问题的一种算法.

解：我们用自然语言对算法进行描述：

S1：将 8 枚银元平均分为两部分，分别放在天平的两个秤盘内，则排除较重的 4 枚银元；

S2：将第一步中剩余的 4 枚银元再平均分为两部分，分别放在天平的两个秤盘内，则排除较重的 2 枚银元；

S3：将第二步中剩余的 2 枚银元分别放在天平的两个秤盘内，则较轻的银元即为假银元.

想一想：若假银元略重，算法又将作怎样的改变？

易错易混问题剖析

用自然语言描述算法，要避免出现歧义．例如，一个算法中某一步出现语句“小王在火车上画画”，既可理解为“小王坐在火车上在纸上作画”，也可理解为“小王把画画在火车上”.

【同步训练 16.1.2】

A　组

1．填空题：

（1）描述算法的方式有：__________、__________、__________；

（2）下面是 $1\times2\times3\times4\times5$ 的一个算法，请补充完整：

S1：计算 1 乘以 2 得 2；

S2：将 S1 的结果乘以 3 得 6；

S3：____________________________；

S4：____________________________.

2．选择题：

（1）下列关于算法的描述不正确的是（　　）.

（A）一个算法的每一步都必须是明确和有效的

（B）一个算法至少有一个输入

（C）一个算法至少有一个输出

（D）一个算法可以解决许多同类型的问题

（2）算法的有穷性是指（　　）.

（A）算法必须包含输出　　　　（B）算法中每个步骤都是可执行的

（C）算法的步骤必须有限　　　（D）以上说法均不对

3．写出 $1\times3\times7\times9\times11$ 的一个算法.

4．已知一个三角形的三边边长分别为 2，3，4，设计一个算法，求它的面积.

B　组

1．选择题：

（1）早上从起床到出门需要洗脸刷牙(5min)、刷水壶（2min）、泡面（5min）、烧水(5min)、吃饭(10min)、听广播(8min)几个步骤，下列选项中最高效的一种算法是（　　）.

（A）S1：洗脸刷牙；S2：刷水壶；S3：烧水；S4：泡面；S5：吃饭；S6：听广播

（B）S1：刷水壶；S2：烧水同时洗脸刷牙；S3：泡面；S4：吃饭；S5：听广播

（C）S1：刷水壶；S2：烧水同时洗脸刷牙；S3：泡面；S4：吃饭同时听广播

（D）S1：吃饭同时听广播；S2：泡面；　S3：烧水同时洗脸刷牙；　S4：刷水壶

（2）已知算法

S1：输入 a，b，c；

S2：$m=a$ ；

S3：若 $b<m$，则 $m=b$；

S4：若 $c<m$，则 $m=c$；

S5：输出 m.

则该算法的执行结果是(　　).

（A）a，b，c 中最大值　　（B）a，b，c 中最小值

（C）将 a，b，c 由小到大排序　　（D）将 a，b，c 由大到小排序

2．写出求 1＋ 2＋ 3＋ 4＋ 5＋ 6＋…＋ 100 的一个算法．可运用公式 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 直接计算：

第一步：____________________；第二步：__________________；第三步：输出计算结果.

3．已知直角坐标系的两点 $A(-1，0)$，$B(3，2)$，写出求直线 AB 的方程的一个算法.

【知识链接】

下面是 2×4×6×8×10 的一个算法，你能否用合适的图例把它表示出来，使之更直观？

S1：计算 2 乘以 4，得到 8；

S2：将 S1 中的运算结果 8 与 6 相乘，得到 48；

S3：将 S2 中的运算结果 48 与 8 相乘，得到 384；

S4：将 S3 中的运算结果 384 与 10 相乘，得到 3 840；

S5：输出结果.

16.2　程序框图与算法的基本逻辑结构

16.2.1　程序框图的基本图例

【学习目标】

1．掌握程序框图中常用的图形符号及其作用；

2．初步学会运用常用的图形符号画出简单的程序框图.

【学法指导】

熟记程序框图中常用符号及其作用，是正确画出程序框图的基础．教材中画出程序框图要注意的三点问题，是画好程序框图的关键．

例题赏析

例　写出 1×2×3×4×5 的一个算法，并画出程序框图．

解：如图 16-1 所示，我们用变量 T 保存积，算法开始时，T 的值应为 1．按照逐一相乘的程序进行：

S1：将 1 赋值给变量 T；

S2：计算 T×2，将结果赋值给变量 T；

S3：计算 T×3，将结果赋值给变量 T；

S4：计算 T×4，将结果赋值给变量 T；

S5：计算 T×5，将结果赋值给变量 T；

S6：输出变量 T 的值．

点拨：本例的算法与同步训练 16.1.2 的 A 组第 1(2)题的算法相同，只是本例的写法与程序框图更接近．

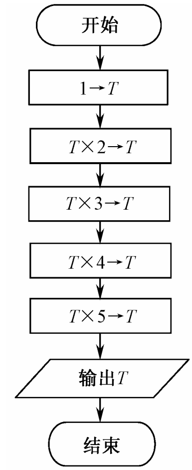


图 16-1

【同步训练 16.2.1】

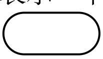
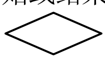
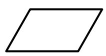
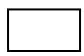
A　组

1．选择题：

（1）程序框图中表示赋值（→）、计算等操作的框是 (　　)

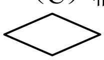
（A）矩形框　（B）菱形框　（C）圆角矩形框　（D）平行四边形框

（2）下列表示一个算法开始或结束的图形符号是　(　　)

（A）　（B）　（C）　（D）

（3）用流程图表示算法时，矩形符号表示（　　）

（A）判断框　（B）处理框　（C）输入输出框　（D）开始、结束框

（4）在算法的程序框图中，图形符号的含义是（　　）

（A）根据给定条件判断　（B）框图的开始

（C）数据或结果的输入或输出　（D）框图的结束

2．填空题：

（1）画程序框图时一般按照从上到下的顺序画，先画______，最后画________；

（2）画程序框图时要根据算法中的操作来选择_______，不能用错．在图形符号内还要_____________，不能只画一个图形符号；

（3）用流程线连接两个图形符号表示算法执行的__________，在连接输入输出框和处理框时，只能有____个入口和____个出口；在连接判断框时，则必须有一个入口和____个出口．

3．试写出图 16-2 所示流程图表示的一个算法．

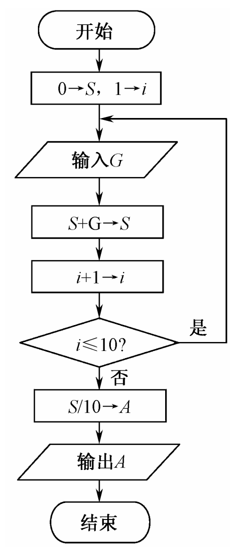


图 16-2

B　　组

1．选择题：

（1）程序框图中表示判断框的是(　　).

（A）矩形框　　（B）菱形框　　（C）圆角矩形框　　（D）平行四边形框

（2）程序框图中的输入、输出框是(　　).

（A）矩形框　　（B）菱形框　　（C）圆角矩形框　　（D）平行四边形框

（3）算法共有三种逻辑结构，即顺序结构，条件分支结构和循环结构，下列说法正确的是(　　).

（A）一个算法只能含有一种逻辑结构

（B）一个算法最多可以包含两种逻辑结构

（C）一个算法必须含有上述三种逻辑结构

（D）一个算法可以含有上述三种逻辑结构的任意组合

（4）阅读图 16-3 的程序框图，若输入的 a，b，c 分别是 21，32，75，则输出的 a，b，c 分别是（　　）.

（A）75，21，32　　（B）21，32，75

（C）32，21，75　　（D）75，32，21

2．填空题：

（1）阅读图 16-4 所示的程序框图，则输出 max 的含义是________________；

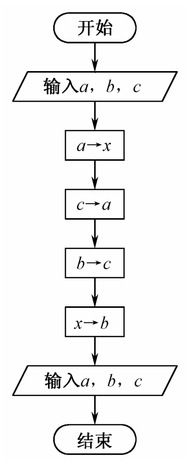


图 16-3

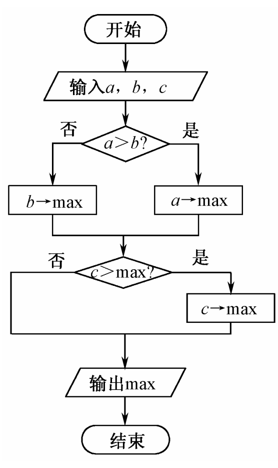


图 16-4

（2）图 16-5 是求解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的程序框图，其中用序号标注的图形符号及应填写的标注依次是：

①是________ 框，应填加的标注是 ____________ ，

②是________ 框，应填加的标注是 ____________ ，

③是________ 框，应填加的标注是 ____________ .

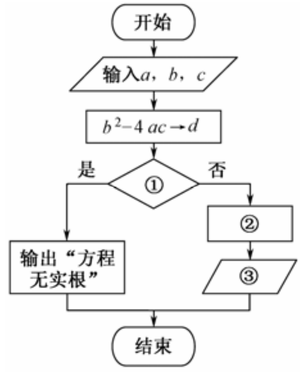


图 16-5

3．设计程序框图，输出 1 000 以内除以 9 余 1 的正整数.

【知识链接】

试写出一个判断输入的整数是奇数的算法.

16.2.2　顺序结构及其框图

【学习目标】

1．了解算法的三种基本结构：顺序结构、条件分支结构和循环结构；
2．掌握顺序结构的特点，能够画出相应的程序框图.

【学法指导】

1．顺序结构是指算法中的每一步操作按照某一顺序线性排列，可以依次执行．譬如，煮面条时，必须按照：刷锅、盛水、烧水、水开后下面条、煮熟捞面等顺次进行.

2．学习算法的结构时，应借助程序框图进行辩证地分析，并结合实际例子，力求把握各种基本结构的特点，以及它们相互之间的区别与联系.

例题赏析

例　已知球的半径 r，写出计算球的表面积和体积的算法并画出其框图.

解：计算球的表面积和体积的算法是：

S1：输入 r;

S2：$4\pi r^2 \to S$,

S3：$\dfrac{4}{3}\pi r^3 \to V$;

S4：输出 S，V.

程序框图如图 16-6 所示.

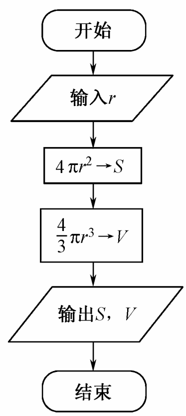


图 16-6

易错易混问题剖析

顺序结构的算法框图一般不含有判断框，并且，起止框一般只有一条流程线连接，输入输出框和处理框都有两条流程线连接（一条流入线，一条流出线），使框图整体上呈“线性”排列.

若某算法框图中至少有一个图形符号拥有 3 条及 3 条以上的流程线，则该算法框图就不是顺序结构的算法框图.

【同步训练 16.2.2】

A　　组

1．选择题：

（1）算法的三种基本结构是（　　）.

　（A）顺序结构、模块结构、条件分支结构

　（B）顺序结构、循环结构、模块结构

（C）顺序结构、条件分支结构、循环结构

（D）模块结构、条件分支结构、循环结构

（2）某同学每天早上起来要做的上学前准备工作如图 16-7 所示的流程图．这种算法的结构是（　　）．

（A）循环结构　　（B）树形结构

（C）条件分支结构　　（D）顺序结构

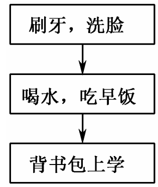


图 16-7

2．填空题：

（1）算法的三种结构是_________、_____________、_____________．其中_________结构是任何一个算法都离不开的结构；

（2）图 16-8 是某算法的程序框图，若 $R=8$，则 $a=$_________；如果 $R=2$，则 $a=$_________；如果 $a=2$，则 $R=$__________．

3．已知梯形的上底、下底和高分别为 5，8，9，写出求梯形的面积的一个算法，并画出程序框图．

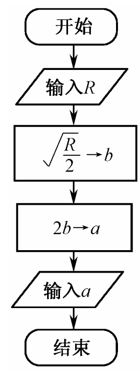


图 16-8

B　组

1．填空题：

（1）顺序结构是指算法中的每一步操作__________，计算机将执行每一步操作；

（2）如图 16-9 所示的算法的流程图，已知 $a=2$，$b=6$，则输出 y 的值为________；如果 $a=2$，输出的 $y=6$，则 b 的值是__________．

2．设计一个输入 x，y 的值，然后交换 x，y 的值的算法，并画出程序流程图．

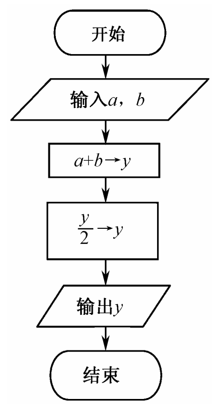


图 16-9

【知识链接】

1．给出任意两个实数，很容易判断出哪个数大．但如果给出成百上千个实数，还能很快判断出哪个数最大吗？

2．给出任意两个实数，你能设计算法输出其中的大数吗？

16.2.3　条件分支结构及其框图

【学习目标】

1．理解条件分支结构的意义，能在程序框图中找出条件分支结构；

2．会用条件分支结构解决简单的算法问题．

【学法指导】

1．条件分支结构的主要特点是：需要对一个条件进行判断，并根据判断结果执行不同的分支操作．在其程序框图中可以看到判断框，从判断框发出两个分支（或称为两个出口），分别标注“是”或“否”，表示条件为真或假．

2．条件分支结构是常用的一个基本结构，应结合实例进行学习．

例题赏析

例 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，设计一个判断二次函数的图像与 x 轴交点的个数的算法，并画出程序框图．

解：算法分析：

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像与 x 轴交点的个数，就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 实根的个数，要判断$\Delta=b^2-4ac$ 与 0 的大小关系，因此这个算法用条件分支结构．

程序框图如图 16-10 所示．

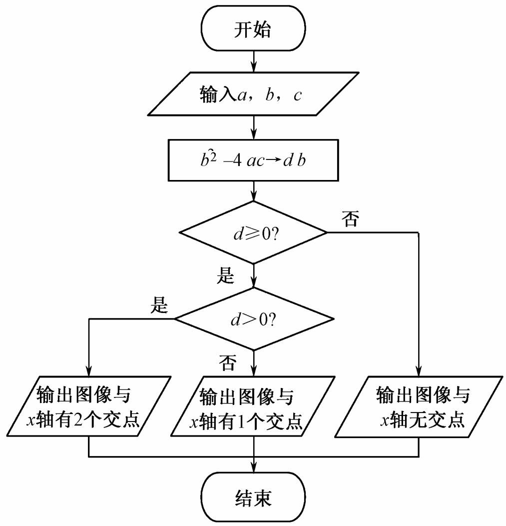


图 16-10

易错易混问题剖析

条件分支结构也称为选择结构，其结构特点是只有一个入口，但必须有两个出口，既不能多，也不能少了，因为条件分支结构中，条件的计算结果只能有两种值如对、错，真、假等，这种结构就像你走到一个三岔路口，需要选择走哪条路，但只能选择其中之一．

【同步训练 16.2.3】

A　组

1．选择题：

（1）在算法的逻辑结构中，可以根据要求进行逻辑判断，并根据判断结果进行不同处理的逻辑结构是（　　）．

（A）循环结构　　　　（B）顺序结构

（C）顺序和条件分支结构　　　　（D）条件分支结构

（2）给出以下四个问题：

①输入一个数 x，输出它的相反数；

②求面积为 6 的正方形的周长；

③求三个数 a，b，c 中的最大数；

④求分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\geq 0)\\ x+2 & (x<0)\end{cases}$ 的函数值．

其中不需要用条件分支结构来描述算法的个数有（　　）．

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

2．填空题：

（1）如图 16-11 所示算法的流程图，当输入的值为 2 时，输出的结果为________；如果输出 y 的值为－27，则输入的值 $x=$__________；

（2）分析图 16-11 所示算法流程图，该函数的表达式为
________________________.

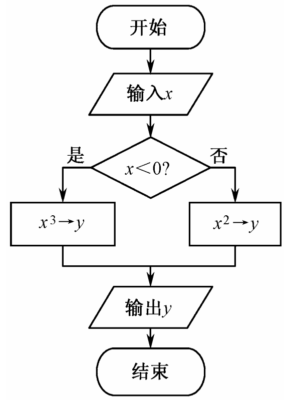


图 16-11

3．设计算法程序框图，要求输入自变量 x 的值，输出函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}x-5 & x>0\\ 0 & x=0\\ \frac{\pi}{2}x+3 & x<0\end{cases}$$ 的值.

B　　组

1．选择题：

（1）如图 16-12 所示流程图片断，它的算法结构属于（　　）.

（A）循环结构　　（B）树形结构　　（C）条件分支结构　　（D）顺序结构

（2）根据图 16-13 所示的框图，若输出结果为 38，则 a 的值为（　　）.

（A）6　　（B）－19　　（C）±6　　（D）19

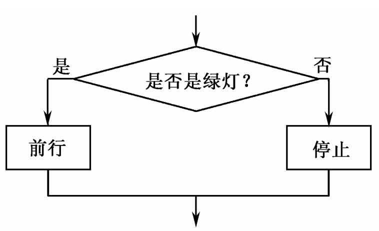


图 16-12

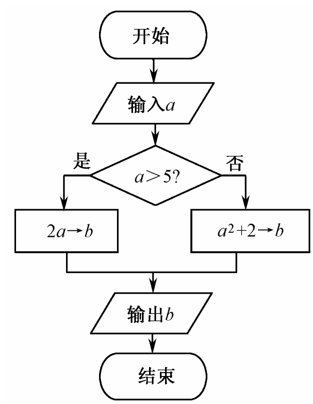


图 16-13

2．填空题：

（1）图 16-14 是求一个数的绝对值的程序框图，把框图补充完整.

①______________；②______________；③_____________；

（2）如图 16-15 所示程序框图，能判断任意输入的数 x 的奇偶性，其中判断框内的条件是_____________ .

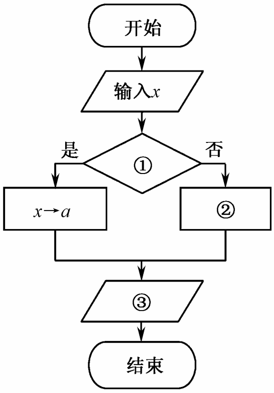


图 16-14

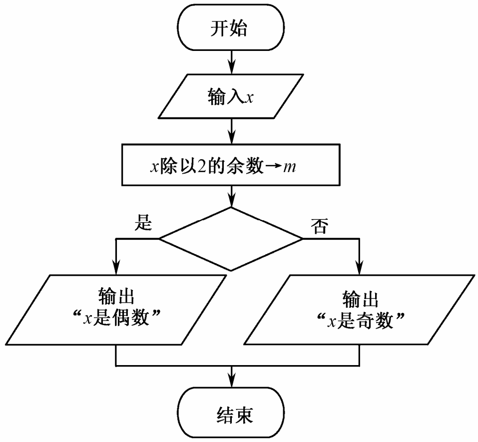


图 16-15

3．设计求 $y=|x-1|$ 的算法，并画出流程图.

4．某超市在国庆节期间搞促销活动，规定超市商品标价不超过 100 元的，按九折收款；标价超过 100 元的，则超过部分按七折收款，写出该超市促销期间收款的算法，并画出流程图.

【知识链接】

已知算法：

S1：输入 x；

S2：判断 $x<0$ 是否成立，若成立则执行 $x+1\to y$，执行 S4；

S3：判断 $x=0$ 是否成立，若成立则执行 $0\to y$；否则执行 $x\to y$；

S4：输出 y；

（1）指出上述算法的功能（用算式表示）；（2）画出该算法的流程图.

16.2.4　循环结构及其框图

【学习目标】

1．理解循环结构的意义，能在程序框图中找出循环结构部分（即“循环体”部分）；

2．能分清循环结构的两种类型，找出两者之间的区别和联系；

3．了解循环结构的执行过程，能用循环结构解决一些常见问题，如求和、求最大值等.

【学法指导】

1．学习过程中，应通过大量实例理解什么是循环，如，活塞的往复运动、时针的圆周运

动、四季的周而复始等都可以看作是一种循环，同时，我们计算 $1+2+3+\cdots+100$ 时，比较容易想到的就是“逐个数往上加”，如果用计算机来计算就可以用到循环.

2．循环结构通常分“当”型循环结构和“直到”型循环结构两种，前者先判断再执行，后者先执行再判断（即直到型循环结构至少执行一次）.

例题赏析

例　运动场上热闹非凡，小白兔看到跑道起点处的绿灯亮着就跑了一圈，回来后看到绿灯还亮着，就又跑了一圈，这样跑了几圈后，发现绿灯灭了，它就没有再跑．小猴子在跳绳，大屏幕上能显示数字给它计数，它一边跳一边看屏幕，一直跳到屏幕上的数字为 100 时才停下来.

请判断小白兔和小猴子谁执行的是“当型”循环.

解：因为小白兔先判断绿灯是否亮着，然后再决定是否继续跑圈，是先判断后执行的循环，因此小白兔执行的是“当”型循环；

因为小猴子先跳绳后看是否达到 100 次，是先执行后判断的循环，因此小猴子执行的是“直到”型循环.

易错易混问题剖析

1．画程序框图用到循环结构时，要特别注意弄清楚该用“当”型循环还是“直到”型循环，从而把握好执行的次数，以免搞错.

2．循环结构的程序框图都是有判断框的，而有判断框的程序框图不一定都是循环结构的．例如，“给定 a，b 两个数，输出其中的较大者”，其程序框图就不是循环结构的.

【同步训练 16.2.4】

A　　组

1．选择题：

（1）下面不属于算法的三种基本结构之一的是（　　）.

（A）顺序结构　　（B）环形结构　　（C）条件分支结构　　（D）循环结构

（2）算法：

S1：输入整数 n；

S2：判断 $n\geqslant 2$ 成立否，若成立，则执行 S3，否则执行 S1；

S3：判断 $n>2$ 成立否，若成立，则执行 S4，否则执行 S5；

S4：依次用 2，3，4，…，$n-1$ 检验能不能整除 n，若都不能整除 n，则执行 S5，否则输出 n 不满足条件；

S5　输出 n 满足条件

本算法中 S5 输出的满足条件的数一定是（　　）.

（A）质数　　（B）奇数

（C）偶数　　（D）约数

（3）如图 16-16 所示的流程图，输出的结果是（　　）

（A）2011　　（B）65

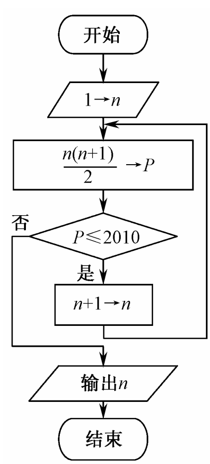


图 16-16

（C）64　　　　　　（D）63

2．填空题：

（1）如图 16-17 所示循环结构框图表示的执行过程是：先执行操作 A 再判断条件，若条件成立则执行_______，然后再_______，若条件仍然成立，则再次执行_______，如此重复直到条件不成立时，不再执行_______而是退出循环结构；

（2）如图 16-18 所示程序框图表示的算法执行的结果是___________.

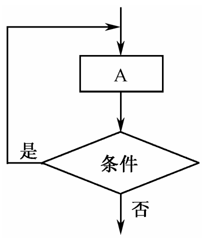


图 16-17

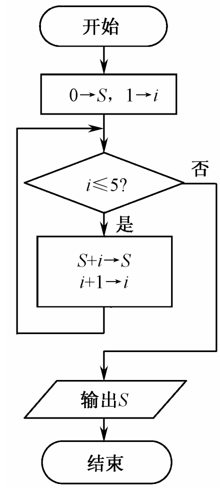


图 16-18

3．设计一个计算 1＋ 2＋ 3＋ …＋ 100 的值的算法，并画出程序框图.

B　　组

1．选择题：

（1）如图 16-19 所示的流程图片断，该流程图中循环部分结束后，变量 S 的值是（　　）.

（A）3　　　　　　（B）6　　　　　　（C）10　　　　　　（D）12

（2）如图 16-20 所示的流程图片断，该流程图中循环部分结束后，变量 S 的值是（　　）.

（A）3　　　　　　（B）6　　　　　　（C）10　　　　　　（D）12

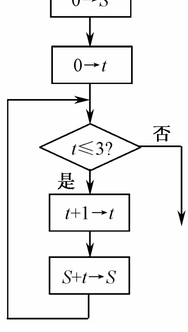


图 16-19

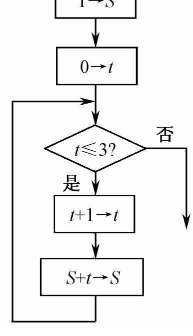


图 16-20

2．设计 $S=1+2+3+\cdots+1000$ 的程序框图．

3．写出求 $1\times3\times5\times7\times9\times11$ 的算法，并画出流程图．

【知识链接】

已知 $1+2+3+\cdots+n$，设计算法程序框图．

16.3　条 件 判 断

【学习目标】

1．记住并会写比较运算符和逻辑运算符，了解其意义；
2．能根据给出的语句写出相应的条件表达式或逻辑表达式；
3．理解条件判断的意义，能在程序框图中正确运用条件判断．

【学法指导】

1．条件判断给出的不管是条件表达式还是逻辑表达式，其结果都只有两个，即：真、假，因此，在画程序框图时，通常在菱形的两个出口处分别标注，“是”，表示真；或“否”，表示假．

2．常用的比较运算有：大于（＞）、小于（＜）、大于等于（＞＝）、小于等于（＜＝）、等于（＝＝）和不等于（＜＞）．常用的逻辑运算有：与（AND）、或（OR）、非（NOT）．

例题赏析

例　写出下列语句的表达式．
（1）整数 x 不小于 10；
（2）整数 x 能被 2 整除但不能被 5 整除；
（3）$a\geqslant b$ 或 $x<0$．

解　（1）$x>=10$；
（2）（MOD（x, 2）＝＝0）AND（NOT（MOD（x, 5）＝＝0））；
（3）（$a>=b$）OR（$x<0$）．

易错易混问题剖析

应特别注意判断清楚逻辑表达式的真值，防止出错．建议记住逻辑运算的真值表．

A	B	A AND B	A OR B	NOT A
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

【同步训练 16.3】

A　组

1．写出下列语句的条件表达式．

（1）数 x 被 3 除余 1；

（2）不大于 10 的实数 x；

（3）数 x 和数 y 不相等．

2．写出下列语句的逻辑表达式．

（1）x 大于 y，且 y 小于等于 z；

（2）a 和 b 不相等，且 x 等于零；

（3）x 或 y 中至多有一个小于 z．

B　组

1．写出下列语句的表达式．

（1）数 x 被 4 除余 1 且被 5 整除；

（2）不大于 10 且不小于 1 的实数 a；

（3）数 x 等于 2 且 y 不等于 1．

2．写出下列语句的表达式．

（1）x 小于 y，且 y 大于 z；

（2）a 和 b 相等，或 a 等于零；

（3）x 或 y 中至少有一个等于 0．

【知识链接】

已知一个学生的语文成绩为 89，数学成绩为 96，外语成绩为 90．求他的总成绩和平均成绩的一个算法为：

S1：取 $A=89$，$B=96$，$C=99$；

S2：____________________；

S3：__________________；

S4：输出计算的结果．

16.4　算法案例

【学习目标】

通过大量的案例分析，进一步理解算法概念及掌握用程序框图设计算法的方法，培养独立分析问题和解决问题的能力.

【学法指导】

1．对每个案例首先要分析其已知和求解，找出要输入的数据和输出的量，然后再考虑解决问题的方法和基本思路.

2．在分析问题时要注重算法的基本框架．在确定了算法基本框架后再考虑算法中的细节，养成良好的习惯，培养自己的算法设计能力.

例题赏析

例 1　已知等式“□3×6528=3□×8265”，其中“□”内表示同一个数字，请画出求等式中“□”表示的数字的算法程序框图.

解：程序框图如图 16-21 所示.

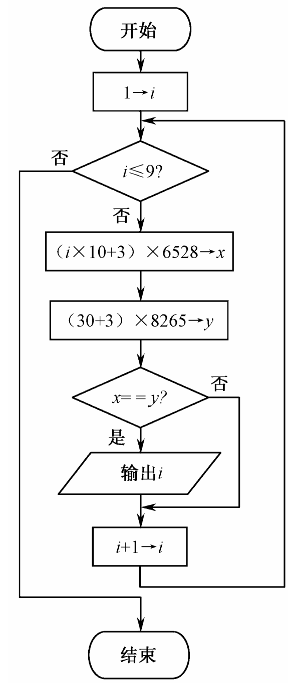


图 16-21

例 2　《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算.

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元的部分至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%

李志强和张利民都认为工资 x ($x\leqslant 5\,000$ 元)与税收 y 的函数关系是一个分段函数，但他们给出的函数却不相同，李志强写出的是：

$$y=\begin{cases}0 & x\leqslant 800\\(x-800)5\% & 800<x\leqslant 1\,300\\(x-800)5\%+(x-1\,300)10\% & 1\,300<x\leqslant 2\,000\\(x-800)5\%+(x-1\,300)\times 10\%+(x-2\,800)15\% & 2\,000<x\leqslant 5\,000\end{cases}$$

张利民写出的是：

$$y=\begin{cases}0 & x\leqslant 800\\(x-800)5\% & 800<x\leqslant 1\,300\\500\times 5\%+(x-1\,300)10\% & 1\,300<x\leqslant 2\,800\\500\times 5\%+1\,500\times 10\%+(x-2\,800)15\% & 2\,800<x\leqslant 5\,000\end{cases}$$

请分析他俩谁给出的函数关系式是正确的，你能给出由工资 x 计算应纳税总额 y 的算法吗？

解　张利民给出的函数关系式是正确的，由工资 x 计算应纳税总额 y 的算法如下：

S1：输入工资 x

S2：判断 $x\leqslant 800$ 是否成立，若成立，则执行 S7；

S3：判断 $800<x\leqslant 1300$ 是否成立，若成立，则执行 S8；

S4：判断 $1300<x\leqslant 2800$ 是否成立，若成立，则执行 S9；

S5：判断 $2800<x\leqslant 5000$ 是否成立，若成立，则执行 S10；

S6：$500\times5\%+1500\times10\%+2200\times15\%\to m$，执行 S11；

S7：$0\to m$，执行 S11；

S8：$(x-800)5\%\to m$，执行 S11；

S9：$500\times5\%+(x-1300)10\%\to m$，执行 S11；

S10：$500\times5\%+1500\times10\%+(x-2800)15\%\to m$，执行 S11；

S11：输出应纳税额为 m 元；

S12：结束.

S13：输出工资 5000 元时，应纳税额为 m 元，超出 5000 元的部分，请查阅相关税率，计算应纳税额，合并计算应纳税总额，执行 S12；

【同步训练 16.4】

A 组

1．根椐下面的算法画出相应的流程图.

算法：

S1：$0\to T$

S2：$2\to i$

S3：$T+i\to T$

S4：$i+2\to i$

S5：如果 i 不大于 200，转 S3

S6：输出 T.

2．写出求分段函数 $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-5 & (0\leqslant x<1)\\ 0 & (x\geqslant 1)\\ \dfrac{x}{2}+3 & (x<0)\end{cases}$ 的函数值的算法，并画出算法程序框图.

3．设计求满足 $1+2+3+\cdots+n>100$ 的最小的自然数 n 的算法的程序框图.

B 组

1．下列四个有关算法的说法中

① 算法的某些步骤可以不明确或有歧义，以便使算法能解决更多问题；

② 正确的算法执行后一定得到确定的结果；

③ 解决某类问题的算法不一定是唯一的；

④ 正确的算法一定能在有限步骤之内结束.

其中正确的是__________.（要求只填写序号）

2．已知算法：

S1　先算 $1\times2\to T$；

S2　$T\times3\to T$；

S3　$T\times4\to T$；

S4　$T\times5\to T$；

S5　输出 T.

试将以上算法改为循环结构并画出流程图.

3．编写由键盘输入的 10 个数的平均数的程序框图.

4．设计求$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$的值的算法的程序框图.

综合练习 16

一、选择题：

1．算法的有穷性是指（　　）.

（A）算法必须包含输出　　（B）算法中每个步骤都是可执行的

（C）算法的步骤必须有限　　（D）以上说法均不对

2．在算法的逻辑结构中，要求进行逻辑判断，并根据结果进行不同处理的结构是 （　　）.

（A）顺序结构　　（B）选择结构和循环结构

（C）顺序结构和选择结构　　（D）没有任何结构

3．将两个数 a=25，b=9 交换，使 a=9，b=25，下面语句正确一组是（　　）.

（A）	（B）	（C）	（D）
$b\to a$ $a\to b$	$a\to b$ $b\to a$	$b\to t$ $a\to b$ $t\to a$	$c\to a$ $b\to c$ $a\to b$

4．下面的结论正确的是（　　）.

（A）一个程序的算法步骤是可逆的　　（B）一个算法是可以无止境地运算下去的

（C）完成一件事情的算法有且只有一种　　（D）设计算法要本着简单方便的原则

5．下列用表达式表示“x 不小于 y，且 y 大于 z”正确的是（　　）.

（A）(x>=y) AND (y>z)　　（B）(x>=y) OR (y>z)

（C）(x>=y) NOT (y>z)　　（D）(x<y) AND (y>z)

6．下列不是逻辑运算符的是（　　）.

（A）OR　　（B）NOT　　（C）＝　　（D）AND

7．计算下列各式中的 S 的值，能设计算法求解的是（　　）.

①$S=1+2+3+\cdots+100$；②$S=1+2+3+\cdots$；③$S=1+2+3+\cdots+n(n\geq2\text{且}n\in\boldsymbol{N})$

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

8．在设计求解一元一次不等式 $ax+b>0$(a，b 为常数）的算法时，需用到的条件语句是（　　）.

（A）b 是否为 0　（B）a 是否为 0　（C）$a>0$　（D）$b<0$

9．图 16-22 给出的是计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{20}$的值的一个程序框图，其中判断框内应填入的条件是（　　）.

（A）$i\geqslant 10$?　（B）$i\leqslant 10$?　（C）$i>20$?　（D）$i<20$?

10．如图 16-23 所示的算法程序框图，表示的算法的功能是求（　　）的值.

（A）$1\times2\times3\times\cdots\times10\ 000$　（B）$1+3+5+\cdots+9\ 999$

（C）$1+2+3+\cdots+10\ 000$　（D）$1\times3\times5\times7\times\cdots\times9\ 999$

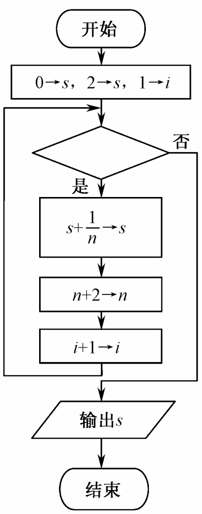


图 16-22

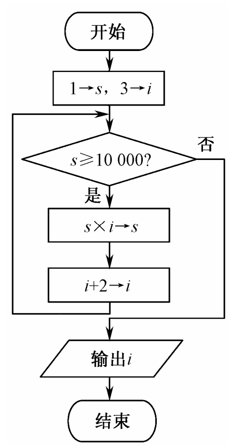


图 16-23

二、填空题：

11．“x 被 4 除余 3” 用表达式可表示为________________.

12．在程序框图用到的图形符号中，有一个进口和两个出口的是________框.

13．图 16-24 是 $1+2+3+4+5$ 的一个算法的流程图，其中判断框中的条件是________.

14．如图 16-25 所示程序流程图，其作用是__________；其中判断条件是__________.

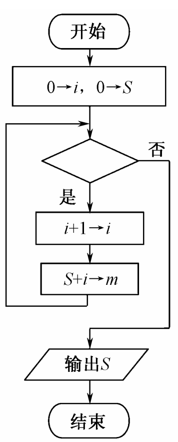


图 16-24

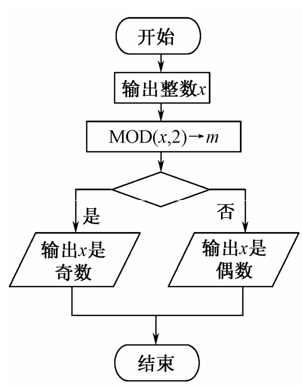


图 16-25

三、解答题

15．画出解关于 x 的方程 $ax+b=0$ (a，$b\in\mathbf{R}$)的流程图．

16．某电信部门规定：拨打市内电话时，如果通话时间不超过 3 分钟，则收取通话费 0.2 元，如果通话时间超过 3 分钟，则超过部分以每分钟 0.1 元收取通话费（通话不足 1 分钟时按 1 分钟计），试设计一个计算通话费用的算法．要求写出算法，画出程序框图．

（注：$[x]$为取整函数，表示不超过 x 的最大整数，如$[4.7]=4$．）

17．设计一个计算 $2+4+6+\cdots+80$ 的算法，并画出算法框图．

18．设计一个算法，输入三个数，输出最大数，并画出流程图．

19．按图 16-26 所示的流程图操作．

（1）操作结果得到的数集是什么？如果把依次产生的数看成是数列 $\{a_n\}$ 的项，试写出其通项公式．

（2）如何变更 ***A*** 框，能使操作流程图产生的数分别是数列 $\{2n-2\}$ 的前 10 项？

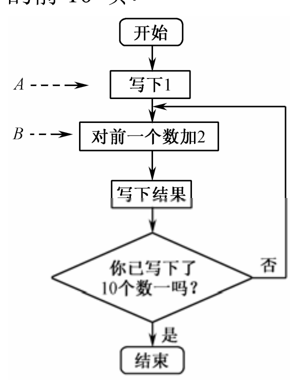


图 16-26

思想火花

古之立大事者，不惟有超世之才，亦必有坚忍不拔之志.

第 17 章　数据表格信息处理

17.1　数组、数据表格的概念

【学习目标】

1．正确理解数组和数据表格的有关概念、两者的区别和联系.

2．正确掌握数组相等的概念.

【学法指导】

在熟悉数据表格中各个元素的基础上，将其抽象为数组这一数学模型.

例题赏析

例　已知数组$(x+2, y-x, y+z)=(3,\ -2, 4)$，求 x，y 和 z.

解　由数组相等的定义知

$$\begin{cases} x+2=3 \\ y-x=-2 \\ y+z=4 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=5 \end{cases}.$$

易错易混问题剖析

注意区分数组与数据表格，数组是有序数据的集合，是构造数据的类型之一，若干个数组可以构成一个表格.

【同步训练 17.1】

A　组

1．用数组的形式表示出下列表格中的数据，并说出数组的维数：

（1）6 个随机数：

4	5	7	3	5	1

（2）某市进行中职技能大赛，各职业学校获奖情况如表 17-1 所示.

表 17-1

序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖
1	某市第一职业中专	8	2	1	2
2	某市第二职业中专	6	6	2	8
3	某市工贸职业中专	6	3	6	7
4	某市机电职业中专	4	4	7	11
5	某市商业学校	5	2	9	14

2．已知数组 $\boldsymbol{a}=(7,-2,2,\ -4,3,6)$，写出该数组的第 3 个分量和第 5 个分量.

3．已知数组 $(x+3,y-4,3z-1)=(4,\ -2,\ -7)$，求 x,y 和 z.

B　组

1．某商场家电产品日销售量如表 17-2 所示.

表 17-2

产品	电视机	电冰箱	洗衣机	影碟机	计算机	空调
销售量	34	32	11	35	27	8

写出表 17-2 中与销售量对应的数组.

2．表 17-3 是某班级进行专业技能比赛第一组 5 名同学的成绩，请完成表格.

表 17-3

姓名	专业理论（40 分）	专业实训（60 分）	总分
孙小惠	35	54	
李曾杰	34	46	
齐志凤	31	58	
徐明会	25	31	
王露璐	38	44	

将表 17-3 更改为表 17-4 形式：

17-4

	孙小惠	李曾杰	齐志凤	徐明会	王露璐
专业理论（40 分）					
专业实训（60 分）					
总分					

3．已知数组$(a+b, b-c, c+a)=(3, -1, 4)$，求 a, b 和 c.

【知识链接】

表 17-5 是某公司在 2009 年第一季度主要配件销售信息表，请完成下列表格，并计算出这个公司在第一季度的总销售额是多少？

表 17-5

配件名称		丝杠	齿轮	联轴器	主轴
售价（元）		860	320	110	1350
月份（件）	一月	22	60	66	18
	二月	46	80	70	31
	三月	28	50	78	40
总销售量（件）					

17.2　数组的代数运算

【学习目标】

熟练掌握数组的加、减、数乘和内积四种代数运算.

【学法指导】

对比以前所学的平面向量的直角坐标的四种运算，学习数组的四种代数运算.

例题赏析

例　已知数组 $\boldsymbol{a}=(4, 3, -2, -1)$，$\boldsymbol{b}=(-3, -1, 5, -2)$，$\boldsymbol{c}=(1, -1, 1, -1)$.

求：(1) $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解　(1) $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}=(12, 9, -6, -3)+(-6, -2, 10, -4)-(5, -5, 5, -5)=(1, 12, -1, -2)$；

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=[-12+(-3)+(-10)+2]\cdot(1, -1, 1, -1)=(-23, 23, -23, 23)$.

易错易混问题剖析

应当注意在 n 维数组的计算中，各个分量的对应运算关系.

【同步训练 17.2】

A　组

1．（1）已知数组 $\boldsymbol{a}=(2, -3, 4, 1)$，$\boldsymbol{b}=(1, 0, 3, -2)$，求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

（2）已知数组 $\boldsymbol{a}=(3,\ -2,4,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值.

2．已知数组 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 和 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

（1）$\boldsymbol{a}=(1,\ -5,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,3,0,1)$ ；

（2）$\boldsymbol{a}=(0,\ -1,\ -4,3,3,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,2,0,5,1)$.

3．已知 $\boldsymbol{a}=(x,3,\ -x)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ -2,4)$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，求 x 的值.

4．已知 $\boldsymbol{a}=(5,7,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,0,\ -2)$ ，$\boldsymbol{c}=(6,2,\ -1)$，求：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；　（2）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；　（3）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$；　（4）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$.

B　组

1．已知数组 $\boldsymbol{a}=(1,\ -1,2)$和 $\boldsymbol{b}=(2,\ -2,4)$，且$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，求$\lambda$和$\mu$的值.

2．已知 $\boldsymbol{a}=(1,3,\ -2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,\ -1,3)$，$\boldsymbol{c}=(1,\ -1,0,\ -2)$，$\boldsymbol{d}=(1,3,\ -2,12)$，确定数 α，β，γ，使 $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$.

3．已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,\ -1)$，$\boldsymbol{c}=(1,\ -1,0)$，$\boldsymbol{d}=(1,\ -2,4)$，并且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=0$，求数组 $\boldsymbol{a}$.

【知识链接】

某市进行中职技能大赛，各个职业学校获奖情况如表 17-6 所示.

表 17-6

序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖	总分
1	某市第一职业中专	4	6	4	4	
2	某市第二职业中专	3	4	6	8	
3	某市工贸职业中专	2	5	8	7	
4	某市机电职业中专	1	3	10	11	
5	某市商业学校	2	6	8	14	

如果规定，每得一个一等奖记 7 分，一个二等奖记 5 分，一个三等奖记 3 分，一个优秀奖记 1 分，请同学们计算上表中 5 所学校的总分，并按照总分从高到低的次序排序.

你能用 Excel 表格完成上述数据处理吗？

17.3　用软件处理数据表格

【学习目标】

掌握用电子表格，会用 Excel 进行相关的数据处理．重点掌握公式、函数、排序、筛选四种数据处理方法.

【学法指导】

1．需要用计算机进行学习，掌握用 Excel 表格处理数据的方法.

2．应当结合计算机基础课程进行学习.

例题赏析

例　用 Excel 软件，计算 $334\times335\div224^2$（精确到 0.001）.

解：第一步：设置单元格 A1 的格式：先右键单击单元格 A1，呼出右键菜单，选择“设置单元格格式”选项，选择“数字”标签，分类中选择“数值”，小数位数为 3，如图 17-1 所示.

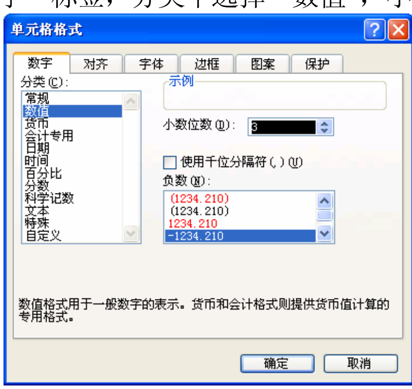


图 17-1　设置单元格 A1 格式

第二步：在单元格 A1 中输入公式“=334*335/224^2”，然后回车.

即得到计算的结果：2.230.

易错易混问题剖析

1．在 Excel 表格中输入数字数据和符号时，要注意输入法必须在英文状态下.
2．在 Excel 表格中输入公式和函数时，一定要先输入等号“=”.

【同步训练 17.3】

A　组

1．选择题：

（1）Excel 中的公式的主要组成部分是（　　）.
　（A）操作符、运算符　　（B）等号(=)
　（C）等号(=)、操作符和运算符　　（D）运算符

（2）在 Excel 中，公式的定义必须以（　　）符号开头.
　（A）=　　（B）^　　（C）/　　（D）S

（3）Excel 中，判断 x 大于或等于 2 的式子为（　　）.
　（A）x>2 AND x =2　　（B）x>OR =2
　（C）x⩾2　　（D）x> =2

（4）在 Excel 公式中用来进行乘的标记为（　　）.
　（A）×　　（B）)　　（C）^　　（D）*

（5）当鼠标移到自动填充句柄上，鼠标指针变为（　　）.
　（A）双键头　　（B）白十字　　（C）黑十字　　（D）黑矩形

（6）要清除单元格内容，可以使用（　　）键来清除.
　（A）Del　　（B）Home　　（C）Ctrl　　（D）Shift

（7）用（　　），使该单元格显示 0.5.
　（A）3/6　　（B）”3/6”　　（C）=”3/6”　　（D）=3/6

（8）在“常用”工具栏上有（　　）个按钮．利用它们可以进行迅速排序.
　（A）两　　（B）三　　（C）四　　（D）五

2．某市进行中职技能大赛，各职业学校获奖情况如表 17-7 所示.

表 17-7

序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖	总分
1	某市第一职业中专	4	6	4	4	
2	某市第二职业中专	3	4	6	8	
3	某市工贸职业中专	2	5	8	7	
4	某市机电职业中专	1	3	10	11	
5	某市商业学校	2	6	8	14	
总　计						

用 Excel 软件完成以下要求：

（1）按照规定，每得一个一等奖记 7 分，一个二等奖记 5 分，一个三等奖记 3 分，一个优秀奖记 1 分，请同学们计算上表中 5 所学校的总分，并按照总分从高到低的次序排序；

（2）计算出本次比赛一等奖、二等奖、三等奖各占所有奖项总和的百分比？

（3）用筛选功能，选出总分在区间[60,70]上的学校.

B　组

1．选择题：

（1）以下表示单元格宽度不够的是（　　）.

（A）(#DIV/O!)　　（B）(#NUM!)

（C）(#VALUE!)　　（D）(#######)

（2）表示对文本进行算术运算的错误值是（　　）.

（A）(#DIV/O!)　　（B）(#NUM!)

（C）(#VALUE!)　　（D）(#######)

（3）表示计算结果无法表示的错误值是（　　）.

（A）(#DIV/O!)　　（B）(#NUM!)

（C）(#VALUE!)　　（D）(#######)

（4）表示做除法时分母为零的错误值是（　　）.

（A）(#DIV/O!)　　（B）(#NUM!)

（C）(#VALUE!)　　（D）(#######)

（5）当我们在 F3 中输入公式“=SUM(F1:F2,F4:F6,C3:E3)”，如果将它复制到 G5 中去,那么 G5 中的内容将是(　　).

（A）=SUM(F1:F2,F4:F6,C3:E3)　　（B）=SUM(G1:G2,G4:G6,D3:F3)

（C）=SUM(G3:G4,G6:G8,D5:F5)　　（D）=SUM(G2:G3,G5:G7,D4:F4)

2．填空题：

（1）在 Excel 中，已知在(A1:A10)中已输入了数值型数据，现要求对(A1:A10)中数值小于 60 的用红色显示，大于等于 60 的数据用蓝色显示，则可对(A1:A10)单元格使用“格式”菜单的______________命令；

（2）如果 A1:A5 包含数字 8，11，15，32 和 4，则函数 MIN(A1:A5)=________.

3．用 Excel 软件，计算 $34 \div (35+23) \times 24^3$（精确到 0.00001）.

4．如果要从 Excel 电子表格的某工资表中筛选出基本工资大于 300，小于 400 元的人员，应如何操作？

【知识链接】

某市进行中职技能大赛，各职业学校获奖情况如表 17-8 所示.

表 17-8

序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖	总分
1	某市第一职业中专	4	6	4	4	
2	某市第二职业中专	3	4	6	8	
3	某市工贸职业中专	2	5	8	7	
4	某市机电职业中专	1	3	10	11	
5	某市商业学校	2	6	8	14	
总　计						

用 Excel 软件完成以下要求：

（1）用柱形图表示各个学校得奖的情况；

（2）用饼图表示出全市一等奖、二等奖、三等奖和优秀奖的分布百分比情况.

17.4　数据表格的图示

【学习目标】

掌握柱形图、条形图、饼图和折线图四种图示．学会将数据表格的数据信息直观化，并能学会分析四种数据图示.

【学法指导】

1．本节内容必须利用计算机中的 Excel 软件进行.

2．应当注意四种不同的图示在不同环境下的应用.

例题赏析

例　某商店将 300 个营业日的营业额做成直方图，如图 17-2 所示，请依图回答下列问题：

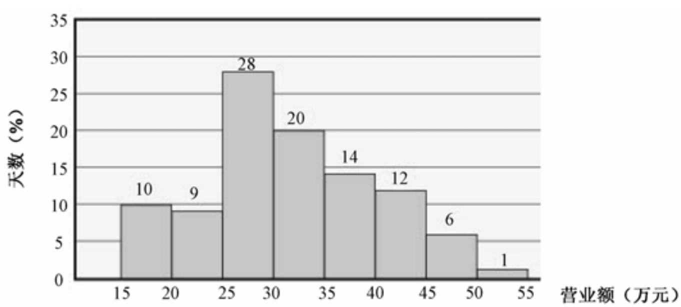


图 17-2　某商店营业额直方图

（1）营业额不到 30 万元的天数占总营业日天数的多少百分比？

（2）有多少天的营业额不到 30 万元？

（3）有多少天的营业额在 40 万元以上？

解：

（1）由上图可知，营业额不到 30 万元的天数占总营业日天数的百分比是

$$10\% + 9\% + 28\% = 47\%;$$

（2）因为总营业日为 300 天，所以营业额不到 30 万元有 $300\times 47\% = 141$(天)；

（3）营业额在 40 万元以上的占 $12\% + 6\% + 1\% = 19\%$，所以有 $300\times 19\% = 57$ (天).

【同步训练 17.4】

A　组

1．选择题

（1）要给图表加标题，首先用鼠标双击要添加标题的图表，使图表的边框变为条纹边框后选择（　　）菜单中的“标题”选项，打开标题对话框，从中选择所需参数.

（A）“编辑”　（B）“插入”　（C）“格式”　（D）“工具”

（2）用 Excel 可以创建各类图表，如条形图、柱形图等．为了显示数据系列中每一项占该系列数值总和的比例关系，应该选择哪一种图表（　　）.

（A）条形图　（B）柱形图　（C）饼图　（D）折线图

（3）在 Excel 中，不能用（　　）的方法建立图表.

（A）在工作表中插入或嵌入图表　（B）添加图表工作表

（C）从非相邻选定区域建立图表　（D）建立数据库

（4）默认的图表类型是二维的（　　）图.

（A）饼　（B）折线　（C）条型　（D）柱型

（5）生成图表的数据称为（　　）.

（A）数据系列　（B）数组　（C）一个区　（D）以上都不是

2．某职业中专在校学生数量 2009 年度第一学期情况统计表如表 17-9 所示.

表 17-9

	会计专业	电子专业	数控专业	计算机专业	合计
高二年级	103	125	98	224	
高一年级	96	153	154	186	
合计					

（1）完成上述表格；

（2）分别做出两个年级各个专业学生数量的饼图和柱形图.

3．某商场 2009 年第三季度家用电器销售情况如表 17-10 所示.

表 17-10

	电视机	电冰箱	空调	计算机
7 月	344	312	621	312
8 月	423	435	730	344
9 月	268	438	323	298
合计				

（1）完成表格；

（2）做出三个月各个家电销量的折线图.

B　组

1．简要写出在 Excel 中，做柱形图的步骤.

2．用手工做出频数数组（10，20，40，15，5，10）的饼图.

综合练习 17

一、判断下列命题的真假：

1．数组 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.（　　）

2．Excel 工作表进行保存时，只能存为后缀为.XLS 的文件.（　　）

3．Excel 单元格的宽度是固定的，为 8 个字符宽.（　　）

4．$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.（　　）

5．$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.（　　）

6．Excel 单元格中的数据可以水平居中，但不能垂直居中.（　　）

7．如果输入单元格中数据宽度大于单元格的宽度时，单元格将显示为“######”.（　　）

8．SUM（A1,A10）和 SUM（A1:A10）两函数的含义是一致的.（　　）

9．Excel 所建立的图表，在工作表数据变化时，图表也随之改变.（　　）

10．Excel 所建立的图表可以是独立图表．当独立图表建立时，它被自动地插入到工作簿中与它有关的工作表左边，默认标签为“图表 1”、“图表 2”、（　　）

二、选择题：

1．数组（2, 5, 3, 7, 4, 5）中，序号为 5 的数组元素为（　　）.

（A）2　（B）3　（C）4　（D）7

2．数组（3, 2, 3, 5, 3, 3）中所含数组元素的个数为（　　）.

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8

3．已知数组 $\boldsymbol{a}=(1, 4, -2)$和 $\boldsymbol{b}=(2, 8, -4)$，且 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 x 和 y 的值分别为（　　）.

（A）2, 1　（B）2, −2　（C）2, −1　（D）−1, 2

4．已知数组$(x-2, x-y, 2z-y)+(3, -1, 6)=\boldsymbol{0}$，则 z 的值为（　　）.

（A）4　（B）5　（C）−6　（D）6

5．$(3x, 2, -6)=2(6, 1, -3)$，则 x 的值为（　　）.

（A）4　（B）6　（C）3　（D）12

6．已知数组 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1, 3,\ -1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值为（　　）.

（A）7　　（B）15　　（C）$\sqrt{7}$　　（D）$\sqrt{15}$

7．已知 $(2, x,\ -1)\cdot(3,\ -1, 2)=0$，则 x 的值为（　　）.

（A）-4　　（B）2　　（C）4　　（D）-2

8．如果单元格 F5 中输入的是=$C5,将其复制到 C6 中去，则 C6 中的内容是（　　）.

（A）$D6　　（B）$C6　　（C）D6　　（D）$C5

三、填空题：

1．$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中，a_8 在数组中的序号为__________；

2．已知数组 $\boldsymbol{a}=(2, 1,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ -1, 5)$，$\boldsymbol{c}=(6, 1, 3)$．则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=$__________；

3．已知数组 $\boldsymbol{a}=(2, 1,\ -2, 4)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 1,\ -1, 1)$．则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__________；

4．已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(2, 0,\ -1)$，$\boldsymbol{c}=(1,\ -2, 0)$，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$__________；

5．用 Excel 作数据表格的饼图，选择菜单的命令为__________；

6．在 Excel 公式中用来进行开算术平方根的函数为___________；

7．数据排序时可以同时指定的关键字最多有________个；

8．若某工作表的 C2 单元格中的公式是：=A1+$B$1，再将 C2 单元格复制到 C3 单元格中，则 C3 单元格中的公式是___________.

四、已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ -3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 3,\ -3)$，完成表 17-11 所需的内容.

表 17-11

内积	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$		
$\boldsymbol{b}$		

五、表 17-12 是某职业中专近三学年生师比统计表，请完成下列表格，并用适当的图示表示出表中的数据.

表 17-12

学年	折合在校学生数	专任教师	外聘教师	教师总数	全校生师比
2007-2008	1700	125	5		
2008-2009	1900	129	13		
2009-2010	2000	129	17		

六、已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ -1, 3, 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ -3, 1, 5)$，$\boldsymbol{c}=(3,\ -4, 5, 2)$，$\boldsymbol{d}=(2,\ -3, 0, 10)$，确定数 α，β，γ，使 $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$.

七、在 Excel 中，假定存在一个数据库工作表，内含：姓名、专业、奖学金、成绩等项目，现要求对相同专业的学生按奖学金从高到低进行排序，请简要写出排序的步骤.

思想火花

在今天和明天之间，有一段很长的时间；趁你还有精神的时候，学习迅速办事。

第 18 章　编制计划的原理和方法

18.1　编制计划的有关概念

【学习目标】

1．掌握编制计划的有关概念；

2．能够分析简单统筹问题中各项工作之间的邻接关系，并能画出整个活动的网络图．

【学法指导】

1．虚工作只是为了表述工作间的逻辑关系，既不消耗时间，也不消耗资源．

2．在画图时，节点的编号采取由“小”到“大”的原则顺序编号，箭尾的号要比箭头的号小．

3．紧前工作与紧后工作是相对的，如图 18-1 中，工作 A 是工作 B 的紧前工作，反之，工作 B 也就是工作 A 的紧后工作．

图 18-1

例题赏析

例 1　双代号网络图中，节点表示（　　）．

（A）工作的连接状态　　（B）工作的开始

（C）工作的结束　　（D）工作的开始或结束

分析：在双代号网络图中，起始节点表示一项计划或工程的开始，也表示计划中第一项工作的开始；终止节点表示计划的完成也表示计划工作的结束；中间节点既表示计划中一项工作的开始，又表示一项工作的结束．故选（D）．

解：答案为（D）．

例 2　某人准备在只有一个灶头的燃气灶上做中午饭，需要完成以下活动：淘米用 5 分钟，洗菜用 4 分钟，烧水用 6 分钟，煮饭用 8 分钟，炒菜用 6 分钟．试分析以上各活动之间的邻接关系，并画出整个活动的网络图．

解：分析以上各项活动，可以先烧水，烧水的同时淘米，水烧开后煮饭的同时洗菜，最后是炒菜．其中烧水同淘米是平行工作，煮饭同洗菜也是平行工作．整个活动的网络图如图 18-2 所示．

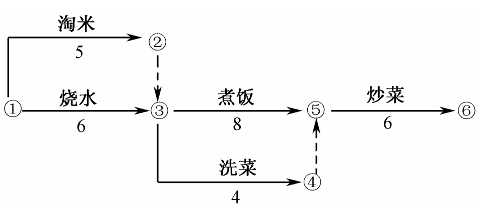


图 18-2

【同步训练 18.1】

A　组

1．双代号网络图中的虚工作（　　）．

（A）既消耗时间，又消耗资源　　（B）只消耗时间，不消耗资源

（C）既不消耗时间，又不消耗资源　　（D）不消耗时间，只消耗资源

2．下列有关虚工作的说法错误的是（　　）．

（A）虚工作只表示工序之间的逻辑关系　　（B）表示虚工作的箭线可以是实箭线

（C）虚工作的工期是 0　　（D）虚工作一般用虚箭线表示

3．网络图中的起始节点的特点有（　　）．

（A）编号最大　　（B）无向外连接的箭线

（C）无指向该节点的箭线　　（D）可以有多个同时存在

4．判断题：

（1）网络图中某工作的紧后工作包括了该工作后面所有的工作．（　　）

（2）网络图中某工作的紧前工作一定不是虚工作．（　　）

（3）在网络中，箭线的长度和时间长短不存在比例关系．（　　）

B　组

1．有关网络图下列说法正确的是（　　）．

（A）工作的名称一般标在箭线的下方

（B）工期标在箭线的上方

（C）某工作后面所有的工作都是紧后工作

（D）可以同时开始的工作称为平行工作

2．如图 18-3 中，煮饭这一工序可以表示为（　　）．

（A）<3，5>　　（B）<5，3>

（C）<3，4，5>　　（D）3，－5

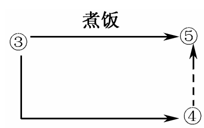


图 18-3

3．已知某统筹问题的网络图如图 18-4 所示，试回答下列问题：

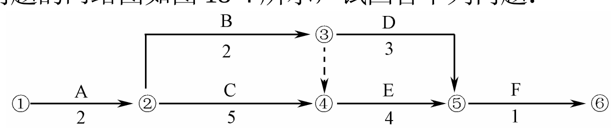


图 18-4

（1）完成表 18-1．

表 18-1

序号	工作名称	持续时间/天	紧前工作
1			
2			
3			
4			
5			
6			

（2）工作 C 的紧后工作是什么？它的平行工作呢？

（3）网络图中虚工作怎么表示？

【知识链接】

在网络图 18-5 中，从节点①到节点⑥，共有多少条“走法”？每条“走法”所走的距离各是多少？

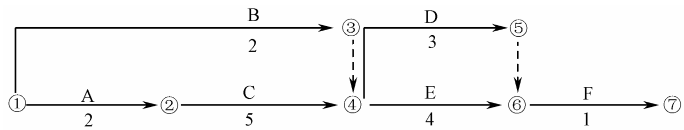


图 18-5

18.2　关键路径法

【学习目标】

1．理解掌握用关键路径法来编制计划的步骤；
2．理解关键路径、关键节点的概念，会用通过计算路长的方法来确定网络图的关键路径.

【学法指导】

用关键路径法来编制计划，一般分为三个步骤：
1．将统筹问题进行分解，并确定各工作或工序之间的邻接关系；
2．根据工作之间的邻接关系表作出网络图；
3．找出网络图中的关键路径，计算其路长，从而确定编制计划的时间进程.

例题赏析

例 1　某单位保安人员每天到单位巡查前有以下活动：签到用 1 分钟，整理卫生用 3 分钟，打开电脑 1 分钟，查看监控记录 5 分钟.

试分析以上活动的邻接关系，作出邻接表，画出网络图，并确定关键路径及完成该统筹问题所用的时间.

解：工作邻接表如表 18-2 所示。

表 18-2　工作邻接表

序号	工作名称	持续时间（分钟）	紧前工作
1	签到	1	—
2	整理卫生	3	1
3	打开电脑	2	1
4	查看记录	5	2，3

该统筹问题的计划网络图如图 18-6 所示.

图 18-6

关键路径为：

①→②→④→⑤；

完成该统筹问题所用的时间为 1+3+5=9（分钟）.

例 2　计算图 18-7 中各路径长度，并确定关键路径.

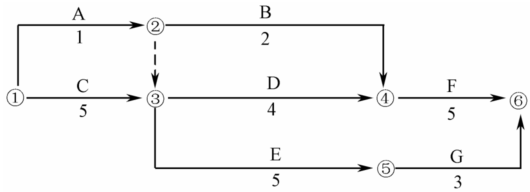


图 18-7

解：

路径①→②→④→⑥的路长为：1+2+5=8；

路径①→②→③→④→⑥的路长为：1+0+4+5=10；

路径①→②→③→⑤→⑥的路长为：1+0+5+3=9；

路径①→③→④→⑥的路长为：5+4+5=14；

路径①→③→⑤→⑥的路长为：5+5+3=13.

其中关键路径为①→③→④→⑥.

【同步训练 18.2】

A　组

1．如图 18-8 所示，某工程的计划网络图如下：

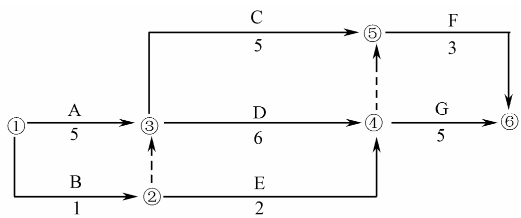


图 18-8

试根据上图完成该统筹问题的邻接表 18-3.

表 18-3

序号	工作	工期/天	紧前工作
1	A		
2	B		
3	C		
4	D		
5	E		
6	F		
7	G		

2．某工程由以下几项工作组成，各项工作之间的相互制约、相互依赖的关系如下所述：A、C 均为第一个开始的工作，D，E 开始前，C 必须结束，A 结束后，B 才能开始；F 开始

前，B，D 必须结束；E 结束后，G 才能开始；F，G 均为最后结束的工作．上述工作持续时间如表 18-4 所示：

表 18-4

工作	A	B	C	D	E	F	G
工期	1	3	5	4	5	5	3

试根据上述内容，作出各工作之间的邻接表，画出该统筹问题的网络图并确定关键路径，求出每条路径的路长．

B　组

1．列举出网络图 18-9 中的所有路径，计算每条路径的长度．

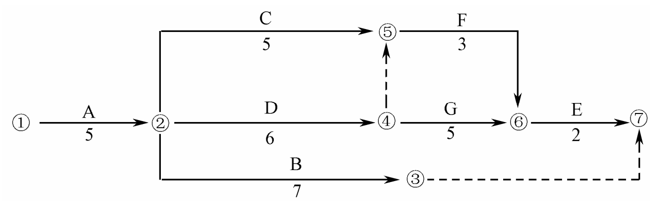


图 18-9

2．某工程由十项工作组成，各项工作之间的相互制约、相互依赖的关系如下所述：A、B 均为第一个开始的工作，G 开始前，D、P 必须结束，E、F 结束后，C、D 才能开始；F、Q 开始前，A 应该结束；C、D、P、Q 结束后，H 才能开始；E、P 开始前，A、B 必须结束；G、H 均为最后一个结束的工作．上述工作持续时间如表 18-5 所示．

表 18-5

工作	持续时间（天）	工作	持续时间（天）
A	6	F	2
B	4	G	5
C	2	H	7
D	4	P	8
E	5	Q	10

试根据上述内容，作出各工作之间的邻接表，并画出该统筹问题的网络图．

【知识链接】

已知某工程各工序邻接关系和各工序持续时间如表 18-6 所示，试绘制网络图，确定关键路径并求其路长．

表 18-6

工序	A	B	C	D	E	F	G	H
紧前工序	—	A	B	B	B	C，D	C，E	F，G
持续时间	1	3	6	1	2	4	2	4

18.3 统 筹 图

【学习目标】

1．掌握网络图的绘制规则，能根据工作邻接表画出简单网络图；

2．了解时标网络图和横道图.

【学法指导】

箭线、节点和路径是网络图的三要素.

网络图不仅可以表示计划任务的进度安排，而且能反映其中各项作业（工序）之间的相互关系，它是进行网络分析，计算网络时间，确定关键路线和关键工序的基础.

例题赏析

例 根据表 18-7 所示工作的邻接表：

表 18-7

序号	1	2	3	4	5	6	7
工作	A	B	C	D	E	F	H
工期	1	2	5	3	2	3	2
紧前工作	—	A	A	A	B，C	B，C	D，E，F

（1）作出网络图；（2）试问：该统筹问题需要多少天完工？

解：（1）由邻接表可以看出，B，C，D 是 A 的紧后工作，可以平行展开；E，F 是 B，C 的紧后工作，并且是平行关系；D，E，F 是 H 的紧前工作；H 工作的箭头节点是终点节点．网络图如图 18-10 所示.

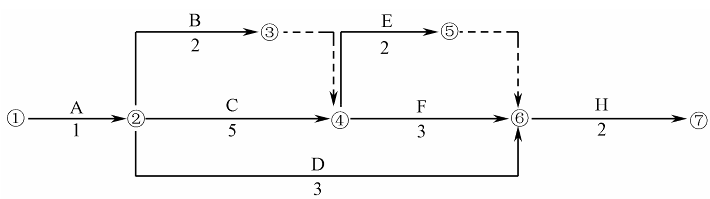


图 18-10

（2）该统筹问题共需要 1+5+3+2=11（天）完工.

【同步训练 18.3】

A　组

1．在双代号网络图中工作<i，j>中，i 和 j 的大小关系是（　　）.

（A）$i = j$　　（B）$i > j$

（C）$i < j$　　（D）i 和 j 大小关系不能确定

2．双代号网络图的三要素是指（　　）.

（A）节点、箭杆、工作作业时间　　（B）紧前工作、紧后工作、关键线路

（C）工作、节点、线路　　（D）工期、关键线路、非关键线路

3．在网络图中对编号的描述错误的是（　　）.

（A）箭头编号大于箭尾编号　　（B）应从小到大、从左往右编号

（C）可以间隔编号　　（D）必要时可以编号重复

4．双代号网络图的组成中不包括（　　）.

（A）工作间的时间间隔　　（B）线路与关键线路

（C）实箭线表示的工作　　（D）圆圈表示的节点

5．一个双代号网络图中，应该是(　　).

（A）一个起始节点和一个终止节点　　（B）一个起始节点和二个终止节点

（C）二个起始节点和一个终止节点　　（D）若干个起始节点和若干个终止节点

6．已知各项工作之间的逻辑关系如表 18-8 所示，试绘制双代号网络图.

表 18-8

工作代号	A	B	C	D	E
紧前工作	—	—	A	A，B	B

7．根据表 18-9 所列数据（先填写紧后工作），绘制双代号网络图，并指出关键线路及工期.

表 18-9

工作代号	A	B	C	D	E	F	G	H
紧前工作	—	—	A	A，B	B	C，D	E	F，G
持续时间	4	2	4	2	6	1	3	2

8．填写表 18-10 中的空缺栏目，并绘制相应的网络图.

表 18-10

工作代号	A	B	C	D	E	F
紧前工作						
紧后工作	B，C，E	F	D	F	D	—

B　组

1．下列说法正确的是（　　）.

（A）在网络计划中关键线路的长度就是网络计划的总工期

（B）在网络计划中允许出现循环回路

（C）在网络计划中可以出现一个以上的起始节点

（D）在网络计划中可以有一个以上终点节点

2．下列有关横道图说法错误的是（　　）.

（A）利用横道图表示工程项目的施工进度计划可以明确表示作业的进度

（B）利用横道图表示工程项目的施工进度计划可以明确哪些为关键工作

（C）利用横道图不能反映出工作所具有的机动时间

（D）利用横道图能明确地表示出各项工作的划分、工作的开始时间和完成时间

3．下列哪一项不是双代号网络图的基本要素（　　）.

（A）工作　　（B）节点　　（C）空间　　（D）线路

4．某工程各项工作间的逻辑关系如表18-11所示。

表18-11

工作	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
紧前工作	—	—	A	A	B	D，E	B	F	F	C，H
持续时间	2	3	5	3	2	4	2	1	3	4

（1）试绘制网络图，并确定关键路径及其路长；

（2）利用Excel绘制该工程的横道图（工程起始时间定为2010年9月1日）.

【知识链接】

填空表18-12中的空缺栏目，并绘制双代号网络图.

表18-12

工作代号	A	B	C	D	E
紧前工作					
紧后工作	B，C	D，E	D	—	—

18.4　进度计划的编制

18.4.1　网络图的时间参数

【学习目标】

1．理解并会计算节点的最早开始时间、最迟开始时间、工作的自由时差和总时间；

2．掌握用工作的总时差来确定关键路径的方法.

【学法指导】

1．计算节点最早开始时间有如下公式：

$$ET_i=\begin{cases}0 & （i\text{节点为起点节点}）\\ ET_h+D_{h-i} & （i\text{节点前只有一个节点}）\\ \max\{ET_h+D_{h-i}\} & （i\text{节点前有多个节点}）\end{cases}$$

其中 h 是 i 节点前面的节点编号.

2．计算节点的最迟开始时间有如下公式：

$$LT_i=\begin{cases}LT_i=ET_i & （i\text{节点为终点节点}）\\ LT_j+D_{i-j} & （i\text{节点后面有一个节点}）\\ \max\{LT_j-D_{i-j}\} & （i\text{节点后面有多个节点}）\end{cases}$$

其中 j 是 i 节点后面的节点编号.

3．工作 $<i, j>$ 的自由时差 $r<i, j>$ 为

$$r<i, j>=ET_j-ET_i-D_{i\text{-}j}.$$

4．工作 $<i, j>$ 的总时差 $R<i, j>$ 规定为

$$R<i, j>=LT_j-ET_i-D_{i\text{-}j}.$$

例题赏析

例 1　根据网络图 18-11 计算各项工作的时间参数，判定关键线路.

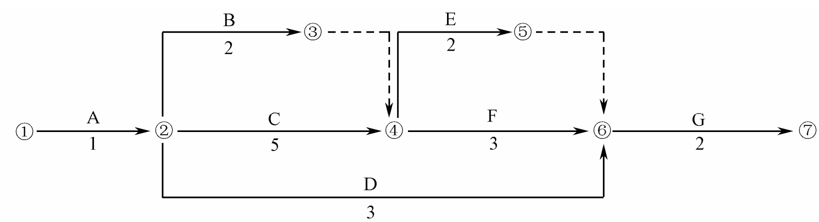


图 18-11

解：判定关键线路如图 18-12 所示.

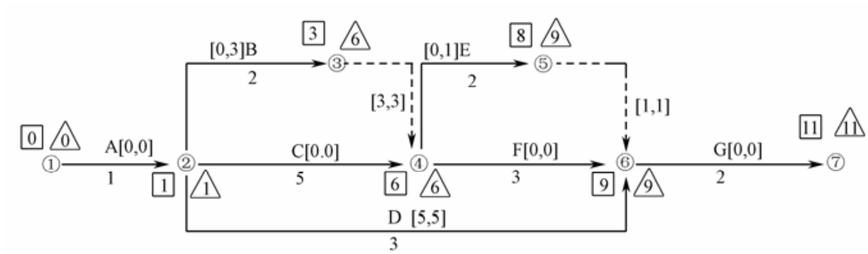


图 18-12

例 2　已知某工程各工序邻接关系和各工序持续时间如表 18-13 所示，试绘制双代号网络图，并在网络图 18-13 上计算各时间参数.

表 18-13

工序	A	B	C	D	E	F	G	H
紧前工序	—	A	B	B	B	C，D	C，E	F，G
持续时间	1	3	1	6	2	4	2	4

解:

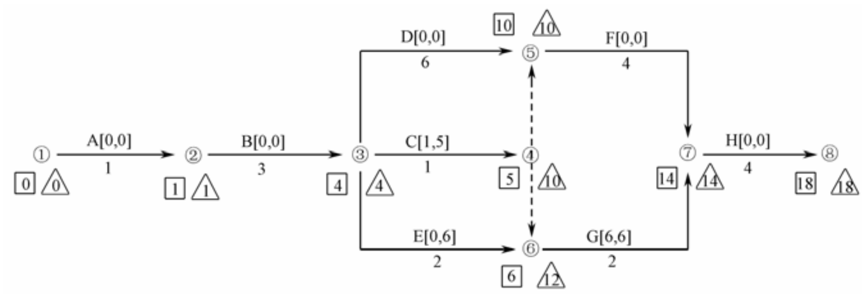


图 18-13

【同步训练 18.4.1】

A　　组

1．在网络图中，成为关键线路的充分条件是（　　）.

（A）总时差为零，自由时差不为零　　（B）总时差不为零，自由时差为零

（C）总时差为零及自由时差均为零　　（D）总时差不小于自由时差

2．在网络计划时间参数的计算中，关于时差的正确描述是（　　）.

（A）一项工作的总时差不小于自由时差

（B）一项工作的自由时差为零，其总时差必为零

（C）总时差是不影响紧后工作最早开始时间的时差

（D）自由时差是可以为一条线路上其他工作所共用的动机时间

3．双代号网络图的绘制规则不正确的是（　　）.

（A）网络图中不允许存在循环路线

（B）网络图中不允许存在断路

（C）一个网络中间节点的编号可以大于终止节点的编号

（D）一个网络只允许有一个起点节点

4．工作 D 有三项紧前工作 A，B，C，其持续时间分别为 3 天、7 天、5 天，其最早开始分别为 4 天、5 天、6 天，则工作 C 的自由时差为（　　）.

（A）0 天　　（B）5 天　　（C）1 天　　（D）3 天

5．已知某工程各工序邻接关系和各工序持续时间如表 18-14 所示，试绘制双代号网络图，并在网络图上计算各时间参数.

表 18-14

工序	A	B	C	D	E	F	G
紧前工序	—	—	A	B，C	B，C	D	E，F
持续时间	3	1	3	6	2	4	2

B　　组

1．在工程网络计划执行过程中，当某项工作的最早完成时间推迟天数超过自由时差时，将会影响（　　）.

（A）紧后工作的最早开始时间　　（B）平行工作的最早开始时间

（C）本工作的最迟完成时间　　（D）紧后工作的最迟完成时间

2．在工程网络计划的执行过程中，发现某工作的实际进度比其计划进度拖后 5 天，影响总工期 2 天，则该工作原来的总时差为（　　）．

（A）2 天　（B）3 天　（C）5 天　（D）7 天

3．在网络计划中，若某项工作的（　　）最小，则该工作必为关键工作．

（A）自由时差　（B）持续时间　（C）时间间隔　（D）总时差

4．已知某工程网络计划中工作 M 的自由时差为 3 天，总时差为 4 天，现实际进度影响总工期 1 天，在其他工作均正常的前提下，工作 M 的实际进度比计划进度拖延了（　　）．

（A）3 天　（B）4 天　（C）5 天　（D）6 天

5．自由时差，是各项工作在不影响紧后工作（　　）时间的条件下所具有的机动时间．

（A）最早开始　（B）最早结束　（C）最迟开始　（D）最迟结束

6．某工程网络计划中，C 工作的总时差为 8 天，自由时差为 5 天，在检查实际进度时，发现 C 工作的持续时间延长了 6 天，则说明 C 工作的实际进度将使其紧后工作的最早开始时间推迟（　　）．

（A）6 天，同时使总工期延长 6 天　（B）6 天，同时使总工期延长 2 天

（C）1 天，同时使总工期延长 2 天　（D）1 天，但不影响总工期

7．某工程网络计划中，B 工作的总时差为 6 天，自由时差为 5 天，在检查实际进度时发现工作 B 的持续时间延长了 8 天，则说明此时 B 工作的实际进度（　　）．

（A）将使其紧后工作的最早开始时间推迟 3 天，并使总工期推迟 2 天

（B）将使其紧后工作的最早开始时间推迟 2 天，并使总工期推迟 2 天

（C）将使其紧后工作的最早开始时间推迟 3 天，但不影响总工期

（D）将使其紧后工作的最早开始时间推迟 2 天，但不影响总工期

8．某统筹问题的计划网络图如图 18-14 所示（时间单位：月）．

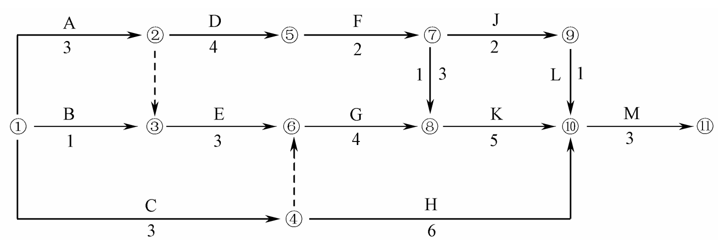


图 18-14

（1）在网络图上计算各时间参数；

（2）确定关键线路，并确定计划的总工期．

【知识链接】

计算图 18-15 所示双代号网络图的各项时间参数．

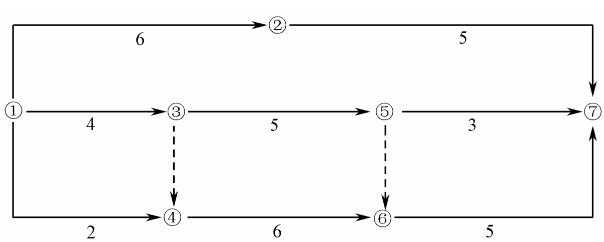


图 18-15

18.4.2　时间优化的方法

【学习目标】

了解时间优化的方法.

【学法指导】

优化时间的途径：一是把某项关键工作分解成并进工作；二是把某项关键工作分解成交叉工作.

例题赏析

例　图 18-16 是某种新产品研制计划的网络图.

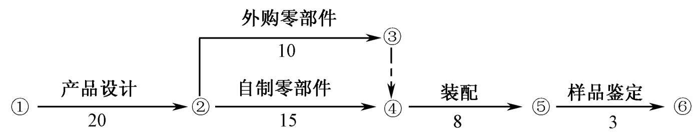


图 18-16

现把该计划中的工序“产品设计”，增加设计人员后，分解为图 18-17 所示.

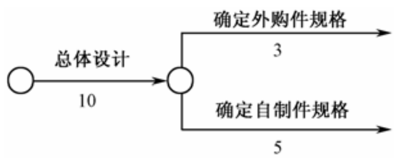


图 18-17

将原计划中的工序“装配”，增加装配人员后，分解为图 18-18 所示.

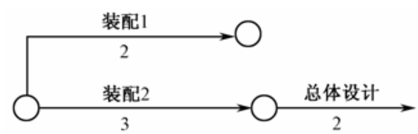


图 18-18

试绘制改进后的网络图，计算时间参数，并指出关键路径、计算改进后的总工期.

解：改进后的网络图如图 18-19 所示.

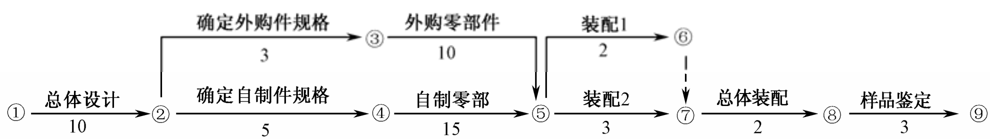


图 18-19

时间参数如表 18-15 所示.

表 18-15

工作<i,j>	$D_{i\text{-}j}$	ET_i	ET_j	LT_j	r<i,j>	R<i,j>
<1，2>	10	0	10	10	0	0
<2，3>	3	10	13	20	0	7
<3，5>	10	13	13	30	7	7
<2，4>	5	10	15	15	0	0
<4，5>	15	15	15	30	0	0
<5，6>	2	30	32	33	0	1
<5，7>	3	30	33	33	0	9
<6，7>	0	32	33	33	1	1
<7，8>	2	33	36	35	0	0
<8，9>	3	35	38	38	0	0

关键路径为：

①→②→④→⑤→⑦→⑧→⑨；

总工期为：

$$10+5+15+3+2+3=38\text{（天）}.$$

【同步训练 18.4.2】

A　组

1．工期优化以（　　）为目标，使其满足规定.

（A）费用最低　（B）资源均衡　（C）最低成本　（D）缩短工期

2．下列说法正确的是（　　）.

（A）在网络计划执行过程中，关键工作的拖延将导致计划总工期不能实现，这时候对网络计划调整的方法只能是缩短某些工作的持续时间.

（B）网络计划工期优化的方法之一是将各项工作持续时间压缩.

（C）网络计划的工期优化，就是通过压缩某些关键工作的持续时间，以达到缩短工期的目的.

（D）网络计划的工期优化，是通过压缩网络中全部工作的持续时间，以达到缩短工期的目的.

3．下列说法错误的是（　　）.

（A）网络计划工期调整的方法，就是缩短某些工作的持续时间.

（B）网络计划中某项工作总时差时为零则自由时差必为零.

（C）关键工作进度落后必定影响工期.

（D）网络计划任何工作实际进度比计划进度落后不一定影响工期.

4．下列说法正确的是（　　）.

（A）在网络图中可以进行时间参数计算，进行网络计划的优化.

（B）工期优化的原则就是将关键工作压缩为非关键工作，以缩短工期.

（C）关键线路上的工作都是关键工作，非关键线路上的工作都是非关键工作.

（D）关键线路是该网络计划中最长的线路，一个网络计划只有一条关键线路.

5．若工作的延误时间大于该工作的自由时差，小于总时差，说明此延误时间对后续工作（　　）.

（A）有影响，但可不作调整　　（B）有影响，必须调整

（C）无影响，且不需调整　　（D）虽无影响，但要调整

B　组

1．若工作的延误时间大于该工作的自由时差，小于总时差，说明此延误时间对总工期（　　）.

（A）有影响，但可不作调整　　（B）有影响，必须调整

（C）无影响，且不需调整　　（D）虽无影响，但要调整

2．工作自由时差是指（　　）.

（A）在不影响总工期的前提下，该工作可以利用的机动时间

（B）在不影响其紧后工作最迟开始的前提下，该工作可以利用的机动时间

（C）在不影响其紧后工作最迟完成时间的前提下，该工作可以利用的机动时间

（D）在不影响其紧后工作最早开始时间的前提下，该工作可以利用的机动时间

3．某工厂车间进行改建．该工程的工作间的邻接表如表 18-16 所示。

表 18-16

工序代号	内容	工期（天）	紧前工序
A	修建内部配件	2	—
B	改造屋顶和地板	3	—
C	修建采集炉	2	A
D	浇注混凝土	4	B
E	修建高温炉膛	4	C
F	安装控制系统	3	C
G	空气净化装置	5	D，E
H	检验和测试	2	F，G

（1）试绘制该工程的计划网络图，确定关键路径并求总工期.

（2）如果增加空气净化装置安装人员，将该工序分解为图 18-20。

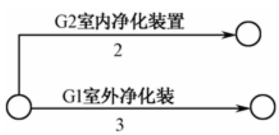


图 18-20

试绘制改进后的计划网络图，计算时间参数，并指出关键路径、计算改进后的总工期.

综合练习 18

一、选择题：

1．网络图中的终止节点的特点有（　　）.

（A）编号最小　　（B）无从该节点向外的箭线

（C）无指向该节点的箭线　　（D）可以有多个同时存在

2．下列哪一项不是双代号网络图的基本要素（　　）.

（A）工作　　（B）节点　　（C）空间　　（D）线路

3．双代号网络图的绘制规则不正确的是（　　）.

（A）网络图中不允许存在循环路线

（B）网络图中不允许存在断路

（C）一个网络中间节点的编号可以大于终止节点的编号

（D）一个网络只允许有一个起点节点

4．下列说法正确的是（　　）.

（A）双代号网络图的三要素是工作、节点和工期

（B）虚工作可以用实箭线表示

（C）双代号网络图中起始节点编号最小

（D）虚工作的自由时差等于 0

5．工作 D 有三项紧前工作 A、B、C，其持续时间分别为：2 天、7 天、4 天，其最早开始分别为 4 天、5 天、7 天，则工作 C 的自由时差为（　　）天.

（A）0　　（B）5　　（C）1　　（D）3

6．在工程网络计划执行过程中，当某项工作的最早完成时间推迟天数超过自由时差时，将会影响（　　）.

（A）紧后工作的最早开始时间　　（B）平行工作的最早开始时间

（C）本工作的最迟完成时间　　（D）紧后工作的最迟完成时间

7．在工程网络计划的执行过程中，发现某工作的实际进度比其计划进度拖后 5 天，影响总工期 2 天，则该工作原来的总时差为（　　）天.

（A）2　　（B）3　　（C）5　　（D）7

8．已知某工程网络计划中工作 M 的自由时差为 3 天，总时差为 5 天，现实际进度影响总工期 1 天，在其他工作均正常的前提下，工作 M 的实际进度比计划进度拖延了（　　）天.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

二、填空题：

9．工作间的邻接关系一般分为__________和紧前、紧后关系；

10．虚工作是既不消耗______也不消耗______的工作；

11．某工程网络计划中，C 工作的总时差为 8 天，自由时差为 5 天，在检查实际进度时，发现 C 工作的持续时间延长了 6 天，则说明 C 工作的实际进度将使其紧后工作的最早开始时间推迟________天；

12．自由时差是各项工作在不影响紧后工作__________时间的条件下所具有的机动时间；

13．横道图也叫________，通过图中的工程标尺和进度标尺，可以查得每项工作的工作时间；

14．工作<i，j>是关键工作的充要条件是________________；

15．节点 i 是关键节点的充要条件是____________.

三、解答题：

16．根据下列工作的邻接表 18-17：

表 18-17

序号	1	2	3	4	5	6	7
工作	A	B	C	D	E	F	G
工期	2	2	5	4	2	4	2
紧前工作	—	A	A	A	B，C	B，C	D，E，F

（1）作出网络图；（2）试问：该统筹问题需要多少天完工？

17．已知某项统筹问题的邻接表 18-18．

表 18-18

工作	A	B	C	D	E	F
工期	4	2	5	3	2	3
紧后工作	B，C，D	E，F	E，F	—	—	—

（1）完成表 18-19．

表 18-19

工作	A	B	C	D	E	F
工期						
紧前工作						

（2）作出该统筹问题的双代号网络图。

（3）试问：该统筹问题需多少天完工？

18．已知某工程各工序邻接关系和各工序持续时间如表 18-20 所示，试绘制双代号网络图，并在网络图上计算各时间参数．

表 18-20

工序	A	B	C	D	E	F	G	H
紧前工序	—	A	B	B	B	D，C	C，E	F，G
持续时间	1	3	1	6	2	4	2	4

思想火花

子曰：“人无远虑，必有近忧。”

第 19 章　线性规划初步

19.1　线性规划问题

【学习目标】

理解线性约束条件和线性目标函数的概念，会根据实际问题背景求满足条件的线性约束条件和目标函数.

【学法指导】

1．通过阅读熟悉问题情景，围绕所求问题的实际，恰当的设出变量，合理分析数量之间的关系，形成不同的约束条件，最后形成线性约束条件.

2．根据问题要求和设出的变量，准确的写出线性目标函数.

例题赏析

例 1　某家电生产企业根据市场调查分析，决定调整产品生产方案，准备每周（按 40 个工时计算）生产空调器、彩电、冰箱共 120 台，且冰箱至少生产 20 台．已知生产这些家电产品每台所需工时和每台产值如表 19-1 所示.

表 19-1

家电名称	空调器	彩电	冰箱
工　时	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
产值/千元	4	3	2

设每周应生产空调器 x 台、彩电 y 台.

（1）试写出 x，y 满足的线性约束条件；

（2）写出产值 z 关于 x，y 的线性目标函数.

分析：（1）根据家电生产企业每周生产空调器、彩电、冰箱共 120 台，若生产空调器 x 台、彩电 y 台，则生产冰箱 $120-x-y$ 台；根据问题的实际意义，应满足条件：$x\in\mathbf{N}$，$y\in\mathbf{N}$；根据每周所提供的工时，应满足条件：$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(120-x-y)\leqslant 40$；根据冰箱至少生产 20 台，应满足条件：$120-x-y\geqslant 20$．以上条件同时具备，形成线性约束条件.

（2）根据生产每台空调器、彩电、冰箱的产值分别为 4 千元、3 千元、2 千元及分别生产的台数分别为 x 台、y 台、$120-x-y$ 台，可得产值 z 关于 x，y 的线性目标函数.

解：（1）因为家电生产企业每周生产空调器、彩电、冰箱共 120 台，每周应生产空调器 x 台、彩电 y 台，所以每周生产冰箱 $120-x-y$ 台．x，y 满足的线性约束条件为：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(120-x-y)\leqslant 40\\ 120-x-y\geqslant 20\\ x\in\mathbf{N}\\ y\in\mathbf{N}\end{cases}.$$

即

$$\begin{cases}3x+y\leqslant 120\\ x+y\leqslant 100\\ x\in\mathbf{N}\\ y\in\mathbf{N}\end{cases}.$$

（2）产值 z 关于 x，y 的线性目标函数为：

$$z=4x+3y+2(120-x-y),$$

即

$$z=2x+y+240.$$

点拨：正确分析出生产冰箱 $120-x-y$ 台是解答本题的关键.

易错易混问题剖析

要注意目标函数中，所求的目标是关于变量的等式，因而才是函数．不要直接根据问题形成不等式.

【同步训练 19.1】

A　组

1．选择题：

一家银行的信贷部计划年初投入 25 000 000 元用于企业贷款和个人贷款，希望这笔资金至少可以带来 30 000 元的收益，其中从企业贷款中获益 12%，从个人贷款中获益 10%．假设用于企业贷款的资金为 x 元，用于个人贷款的资金为 y 元，获得收益 z 元.

（1）考虑用于企业贷款和个人贷款的实际意义，变量 x，y 满足的条件是（　　）.

（A）$x>0$，$y>0$　　（B）$x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$

（C）$x\in\mathbf{N}$，$y\in\mathbf{N}$　　（D）$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$

（2）根据信贷部计划投入贷款的资金额度，变量 x，y 满足的条件是（　　）.

（A）$x+y<25\,000\,000$　　（B）$x+y>25\,000\,000$

（C）$x+y\leqslant 25\,000\,000$　　（D）$x+y\geqslant 25\,000\,000$

（3）根据信贷部计划获得收益的要求，变量 x，y 满足的条件是（　　）.

（A）$(12\%)x+(10\%)y<30\,000$　　（B）$(12\%)x+(10\%)y\leqslant 30\,000$

（C）$(12\%)x+(10\%)y>30\,000$　　（D）$(12\%)x+(10\%)y\geqslant 30\,000$

（4）信贷部分配企业贷款和个人贷款应满足的线性约束条件是（　　）.

（A）$\begin{cases}x+y\leqslant 25\,000\,000\\ (12\%)x+(10\%)y\geqslant 300\,000\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$　　（B）$\begin{cases}x+y\geqslant 25\,000\,000\\ (12\%)x+(10\%)y\geqslant 300\,000\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$

（C）$\begin{cases} x+y<25\,000\,000 \\ (12\%)x+(10\%)y>300\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$　　（D）$\begin{cases} x+y<25\,000\,000 \\ (12\%)x+(10\%)y<300\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

（5）获得收益 z 关于变量 x，y 的线性目标函数是（　　）.

（A）$z=(12\%)x+(10\%)y$　　（B）$z=(10\%)x+(12\%)y$

（C）$z\geqslant(12\%)x+(10\%)y$　　（D）$z\leqslant(12\%)x+(10\%)y$

2．填空题：

某企业生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨；生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨．销售每吨甲产品可获得利润 5 万元、每吨乙产品可获得利润 3 万元．该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨、B 原料不超过 18 吨．假设该企业生产甲 x 吨，生产乙 y 吨，所获利润 z 万元．

（1）若考虑该企业在一个生产周期内消耗 A 原料，变量 x, y 满足的条件为____________；

（2）若考虑该企业在一个生产周期内消耗 B 原料，变量 x, y 满足的条件为____________；

（3）变量 x，y 满足的线性约束条件为__________；

（4）所获利润 z 关于变量 x，y 的线性目标函数是_________.

B　　组

1．选择题：

（1）某工厂用两种不同的原料均可生产同一产品，若采用甲种原料，每吨成本 1 000 元，运费 500 元；若采用乙种原料，每吨成本 1 500 元，运费 400 元．已知每日预算原材料总成本不得超过 6 000 元，运费不得超过 2 000 元．设采用甲种原料 x 吨，采用乙种原料 y 吨，则满足生产的约束条件是（　　）.

（A）$\begin{cases} 1\,000x+1\,500y\leqslant 6\,000 \\ 500x+400y\leqslant 2\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$　　（B）$\begin{cases} 1\,000x+1\,500y<6\,000 \\ 500x+400y<2\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} 1\,000x+1\,500y\geqslant 6\,000 \\ 500x+400y\geqslant 2\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$　　（D）$\begin{cases} 1\,000x+1\,500y>6\,000 \\ 500x+400y>2\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

（2）某厂生产甲产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_1 千克、b_1 千克，生产乙产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_2 千克、b_2 千克．甲、乙产品每千克可获利润分别为 d_1 元、d_2 元．月初一次性购进本月原料 A、B 各 c_1 千克、c_2 千克．要计划本月生产甲产品和乙产品各多少千克才能使月利润达到最大？在这个问题中，设全月生产甲、乙两种产品分别为 x 千克、y 千克，月利润总额为 z 元，那么，求使总利润 $z=d_1x+d_2y$ 最大的数学模型中，线性约束条件为（　　）.

（A）$\begin{cases} a_1x+a_2y\geqslant c_1 \\ b_1x+b_2y\geqslant c_2 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$　　（B）$\begin{cases} a_1x+b_1y\leqslant c_1 \\ a_2x+b_2y\leqslant c_2 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} a_1x+a_2y\leqslant c_1 \\ b_1x+b_2y\leqslant c_2 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$　　（D）$\begin{cases} a_1x+a_2y=c_1 \\ b_1x+b_2y=c_2 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

2．填空题：

（1）某单位要招聘职员至多 5 人，其中男职员不得超过 3 人，女职员不得少于 1 人，假设招聘男职员 x 人，招聘女职员 y 人，则变量 x，y 满足的线性约束条件为________________；

（2）某农场生产的牧草可喂养奶牛和奶羊两种牲畜，一只奶牛每天吃草 15kg，一只奶羊每天吃草 5kg，而该农场每年生产的牧草平均每天只能提供牧草 1000kg，若该农场依靠自己生产的牧草来喂养 x 只奶牛和 y 只奶羊，则变量 x，y 满足的线性约束条件为_________；若喂养一只奶牛每天可获利 20 元，喂养一只奶羊每天可获利 10 元，设该农场每天喂养奶牛和奶羊共获利 z 元，则 z 关于变量 x，y 的线性目标函数是____________.

3．某实验室需购某种化工原料 106 千克，现在市场上该原料有两种包装，一种是每袋 35 千克，价格为 140 元；另一种是每袋 24 千克，价格为 120 元．设购买 35 千克包装的 x 袋，24 千克包装的 y 袋，共花费 z 元.

（1）写出变量 x，y 满足的线性约束条件；

（2）写出 z 关于变量 x，y 的线性目标函数.

【知识链接】

1．如图 19-1 所示，直线 $x+y-1=0$ 可以把直角坐标平面内不在直线上的点分成_______部分，直线 $x+y-1=0$ 的法向量 $\vec{n}=$______，法向量所指向的区域内点 $A(1，1)$的坐标使得 $x+y-1$_____0.

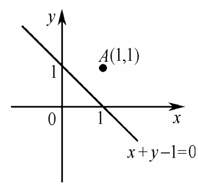


图 19-1

2．在直角坐标平面内找出使 $x+y-1<0$ 的两个点，并说出其所在区域与法向量指向的关系.

19.2　二元一次不等式表示的区域

【学习目标】

理解二元一次不等式在直角坐标平面所表示的区域，能熟练准确的画出二元一次不等式（组）所表示的平面区域.

【学法指导】

1．深刻理解：

“$\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向相同$\Leftrightarrow Ax+By+C>0$；

$$\overrightarrow{P_0P} \text{ 与 } \boldsymbol{n} \text{ 方向相反} \Leftrightarrow Ax+By+C<0.\text{”}$$

的推导过程.

2．牢固识记：“直线 l：$Ax+By+C=0$ 将直角坐标平面内不在 l 上的点分为两部分，直线 l 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$指向的那一侧半平面内所有的点坐标都满足不等式 $Ax+By+C>0$；

而在直线 l 的另一侧，所有点的坐标都满足不等式 $Ax+By+C<0$.” 这一结论.

3．熟练掌握：$Ax+By+C>0$ 和 $Ax+By+C\geqslant 0$ 的区别，前者表示的平面区域不包含直线 $Ax+By+C=0$ 上的点，而后者包含直线 $Ax+By+C=0$ 上的点.

例题赏析

例 1　在直角坐标平面上画出下列不等式表示的平面区域：

（1）$x+1>0$；　　（2）$y-1\leqslant 0$；

（3）$x+y-1>0$；　　（4）$2x-3y-6\leqslant 0$.

分析：在直角坐标平面上首先画出不等式对应的直线，应当注意：当所求区域不包括直线时，用虚线画直线；当所求区域包括直线时，用实线画直线；然后观察不等号和法向量的方向，确定不等式所表示的平面区域，最后用阴影表示.

解：如图 19-2（a）、（b）、（c）、（d）所示，在直角坐标平面上，不等式表示的平面区域分别为：

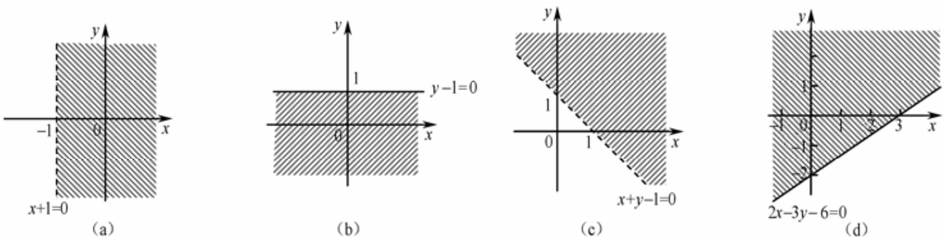


图 19-2

点拨：要注意使用尺规作图，把不等式对应的直线画准确，同时标识不等式对应的直线方程.

例 2　在直角坐标平面上，画出下列不等式组表示的平面区域：

（1）$\begin{cases} 2x-y-2\leqslant 0 \\ x-y+1\geqslant 0 \\ x+y-1\geqslant 0 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} x-y-2<0 \\ 2x-y+2>0 \\ x+y\geqslant 0 \end{cases}$.

分析：先确定每个不等式所表示的平面区域，最后把区域的公共部分用阴影表示出来.

解：在直角坐标平面上，不等式组表示的平面区域分别如图 9-13（a）、（b）所示。

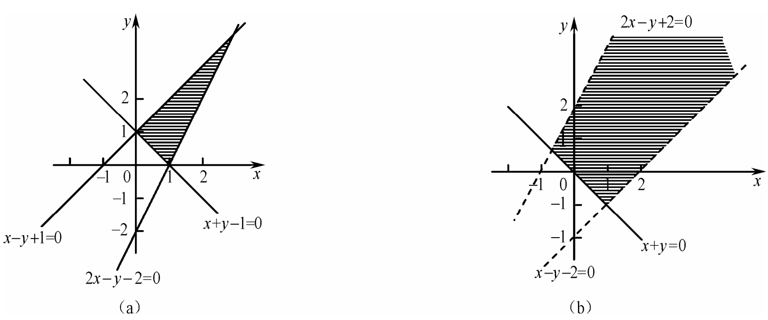


图 19-3

点拨：要注意把公共区域找正确，必要时可以将找到的公共区域内的某个点的坐标代入不等式组进行检验.

易错易混问题剖析

1．不等式对应直线的虚实，要根据不等式的符号来确定，防止混淆.

2．根据不等式的不等号和不等式对应直线的法向量方向，确定不等式表示的区域.

3．不等式组表示的平面区域，一定找准每个不等式所表示的平面区域的公共部分，防止找错.

【同步训练 19.2】

A　　组

1．选择题：

（1）如图 19-4 所示，在直角坐标平面内，不等式 $x-3<0$ 表示的平面区域是（　　）.

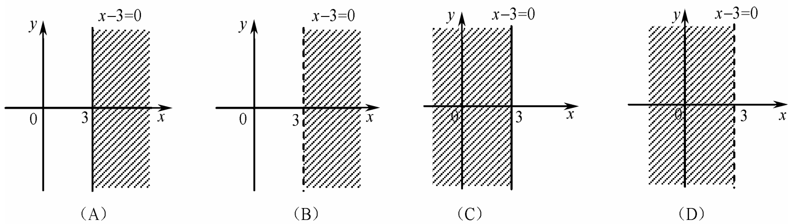


图 19-4

（2）如图 19-5 所示，在直角坐标平面内，不等式 $y+2\leqslant 0$ 表示的平面区域是（　　）.

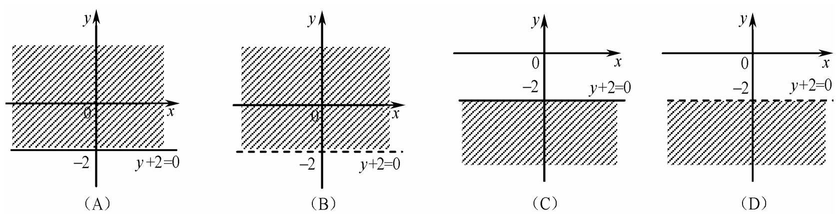


图 19-5

（3）如图 19-6 所示，阴影区域对应的不等式为（　　）.

（A）$3x+y-3\geqslant 0$

（B）$x+3y-3\geqslant 0$

（C）$3x+y+3\leqslant 0$

（D）$x+3y+3\leqslant 0$

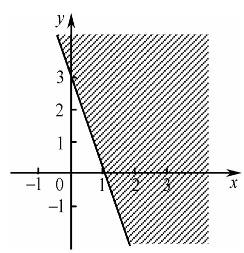


图 19-6

（4）在直角坐标平面内，不等式组 $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积等于（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．填空题：

（1）点 $P(1, 1)$和 $Q(-1, 1)$在不等式 $x+4y-4<0$ 表示的区域内的点是__________；

（2）若点(s, t)在不等式 $x+y-5>0$ 所表示的区域内，则 $s+t$ 与 5 的大小关系是________；

（3）在直角坐标平面内，不等式组$\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ x-y\leqslant 0 \\ y\leqslant 1 \end{cases}$所表示的平面区域的面积等于是__________.

3．在直角坐标平面上，画出不等式组$\begin{cases} x-y+2\leqslant 0 \\ 3x+2y+6\leqslant 0 \\ y\geqslant -3 \end{cases}$表示的区域.

B　　组

1．选择题：

（1）不等式 $x-2y+6>0$ 表示的区域在直线 $x-2y+6=0$ 的（　　）.

（A）右上方　　（B）右下方　　（C）左上方　　（D）左下方

（2）已知不等式 $Ax+By+C<0$ 表示的平面区域，如图 19-7 所示，则（　　）.

（A）$A>0$，$B<0$，$C>0$

（B）$A>0$，$B>0$，$C<0$

（C）$A<0$，$B<0$，$C>0$

（D）$A<0$，$B>0$，$C<0$

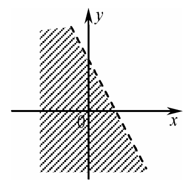


图 19-7

（3）不等式组$\begin{cases} x-3y+6\geqslant 0 \\ x-y+2<0 \end{cases}$表示的平面区域是图 19-8 中的（　　）.

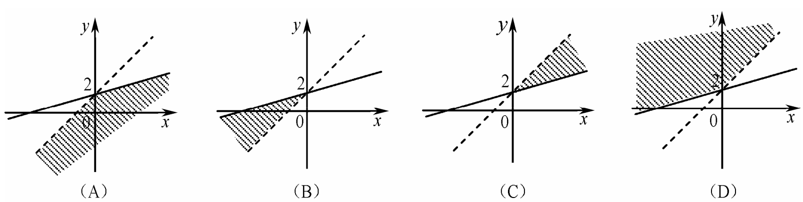


图 19-8

（4）不等式组$\begin{cases} |x|+y\leqslant 0 \\ y+2\geqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域的面积是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．填空题：

（1）如果判断点 $P(2, 3)$和点 $Q(1, 5)$位于直线 $2x-3y+8=0$ 的同侧还是异侧，那么正确的判断是位于直线的____________；

（2）若点$(m，n)$在不等式 $3x+2y-1\leqslant 0$ 所表示的平面区域以外，则 $3m+2n$ 与 1 的大小关系是__________；

（3）表示图 19-9 中阴影部分的二元一次不等式组为__________.

3．已知图 19-10 中的阴影是一个二元一次不等式表示的平面区域，试写出这个不等式组.

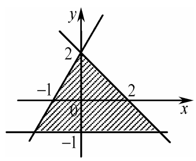


图 19-9

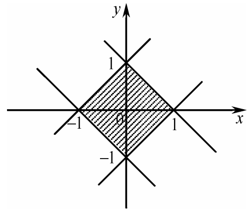


图 19-10

【知识链接】

1．某单位要招聘职员至少 3 人至多 5 人，其中男职员不得超过 3 人，女职员不得少于 1 人，假设招聘男职员 x 人，招聘女职员 y 人，则满足条件$(x，y)$为________________.

2．已知变量 x，y 满足线性约束条件$\begin{cases} x+y\leqslant 5 \\ x\leqslant 3 \\ y\geqslant 1 \end{cases}$.

（1）画出这个不等式组表示的平面区域;

（2）在不等式组表示的平面区域上，若 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，则满足条件$(x，y)$为_____________.

19.3　线性规划的图解法

【学习目标】

1．理解线性目标函数 $z=f(x，y)$转化为 $y=f(x)$，寻找直线 $y=f(x)$满足可行域时在 y 轴上的截距，从而推出 z 的最值的原理.

2．掌握图解法求线性目标函数在可行域上求最值的方法.

【学法指导】

1．画线性约束条件所表示的平面区域要规范准确.

2．理解首先画出 $f(x，y)=0$，然后平移直线 $f(x，y)=0$ 使之通过可行域寻找目标函数最值的原理.

3．当线性目标函数表示的直线通过某两条直线的交点能确定是最优解时，由于几何作图的误差，在直角坐标系中很难准确找出最优解的点坐标，要借助代数解方程组的办法，求出准确的最优解.

例题赏析

例 1　求函数 $z=2x+y$ 的最大值和最小值，其中 x，y 满足线性约束条件:

$$\begin{cases} x-y+4\leqslant 0 \\ x+y-8\geqslant 0 \\ x+2y-4\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x\in\mathbf{Z} \\ y\in\mathbf{Z} \end{cases}.$$

分析：首先在直角坐标平面上画出不等式组$\begin{cases} x-y+4\leqslant 0 \\ x+y-8\geqslant 0 \\ x+2y-4\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域，在此区域内找出横坐标和纵坐标都是整数的点，然后平移直线 $y=-2x$，找到直线经过可行域内的整数点时在 y 轴上截距的最大值和最小值，从而找到 $z=2x+y$ 的最大值和最小值.

解：在直角坐标系中，画出可行域如图所示，并在可行域内找出整数点（横坐标和纵坐标都是整数）.

将目标函数变形为 $y=-2x+z$，令 $z=0$，画出直线 $2x+y=0$，然后平移这条直线，可知当直线经过点 A 时，z 取得最小值，当直线经过点 B 时，z 取得最大值，如图 19-11 所示.

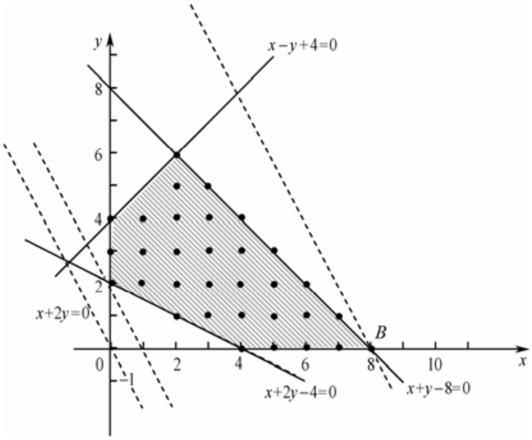


图 19-11

因为 $A(0，2)$，$B(8，0)$是满足条件的最优解，

所以 $z_{\min}=2\times 0+2=2$，$z_{\max}=2\times 8+0=16$.

点拨：准确画出现行约束条件所表示的可行域并找出可行域内的整数点是解决这个问题的基础，平移直线使之经过可行域内整数点，将整数点的坐标代入线性目标函数，从而求出目标函数的最值是解决这个问题的关键.

例 2　求函数 $z=x-2y$ 的最大值和最小值，其中 x，y 满足线性约束条件：

$$\begin{cases} 3x+8y-24\geqslant 0 \\ x-y\geqslant 0 \\ x+y-8\leqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}.$$

分析：首先在直角坐标平面上画出不等式组$\begin{cases} 3x+8y-24\geqslant 0 \\ x-y\geqslant 0 \\ x+y-8\leqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域，然后平移直

线 $y=\frac{1}{2}x$，找到直线经过可行域内的点时在 y 轴上截距的最大值和最小值，从而找到 $z=x-2y$ 的最大值和最小值.

解：在直角坐标系中，画出可行域如图 19-12 所示.

将目标函数变形为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，令 $z=0$，画出直线 $2x+y=0$，然后平移这条直线，可知当直线经过点 A 时，直线在 y 轴上的截距 $-\frac{z}{2}$ 最大，从而 z 取得最小值，当直线经过点 B 时，直线在 y 轴上的截距 $-\frac{z}{2}$ 最小，从而 z 取得最大值，如图 19-12 所示.

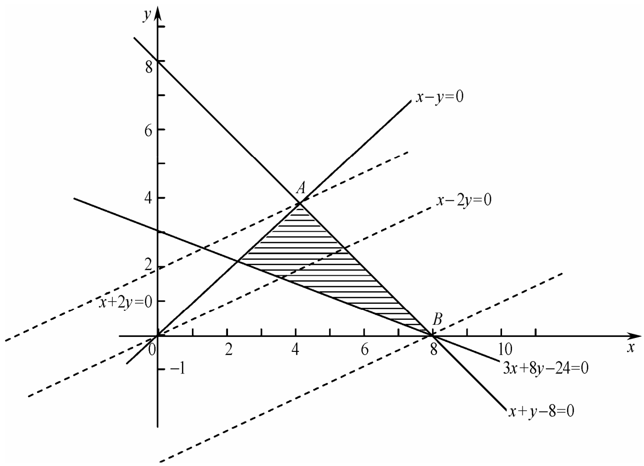


图 19-12

因为 A 是直线 $x-y=0$ 与直线 $x+y-8=0$ 的交点，解方程组 $\begin{cases}x-y=0\\x+y-8=0\end{cases}$ 得 $A(4，4)$，所以 $z_{\min}=4-2\times4=-4$；

因为 B 是直线 $3x+8y-24=0$ 与直线 $x+y-8=0$ 的交点，解方程组 $\begin{cases}3x+8y-24=0\\x+y-8=0\end{cases}$ 得 $B(8，0)$，所以 $z_{\max}=8+2\times0=8$.

点拨：准确画出现行约束条件所表示的可行域是解决这个问题的基础，平移直线使之经过可行域内的点，要注意观察当直线的截距最大时目标函数 z 取得最大值还是最小值，同时求直线的交点坐标要结合解方程组得到．最后将点坐标代入目标函数得到相应的最值.

易错易混问题剖析

1．线性约束条件表示的平面区域要用尺规作图法画准确，否则将导致线性目标函数的最值出现错误.

2．将线性目标函数 $z=0$ 对应的直线平移时，要分清直线的截距最大（最小）时对应的 z 值是取得最大还是最小，防止把最值求颠倒.

3．平移直线经过两直线的交点时，要注意结合代数解方程的方法准确求出最优解，不要只靠几何法观察点最优解的坐标造成最值的误差.

【同步训练 19.3】

A　组

1．选择题：

（1）某公司招聘男职员 x 名，女职员 y 名，变量 x，y 须满足的约束条件是 $\begin{cases}5x-11y\geqslant -22\\2x+3y\geqslant 8\\2x\leqslant 11\end{cases}$，则 $z=10x+10y$ 的最大值是（　　）.

（A）80　　（B）85　　（C）90　　（D）95

（2）设变量 x，y 满足的约束条件是 $\begin{cases}y\leqslant x\\x+y\geqslant 0\\y\geqslant 3x-6\end{cases}$，则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为（　　）.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）9

（3）如果实数 x，y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\y+1\geqslant 0\\x+y+1\leqslant 0\end{cases}$，那么 $2x-y$ 的最大值为（　　）.

（A）2　　（B）1　　（C）-2　　（D）-3

2．填空题：

（1）若 x，y 都是不小于零的整数，则满足不等式 $x+y\leqslant 0$ 的点(x, y)的个数为________；

（2）设 $z=2y-x$，其中变量 x，y 满足的约束条件是 $\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\3x+2y\leqslant 23\\y\geqslant 1\end{cases}$，则 z 的最大值等于______.

3．已知变量 x，y 满足线性约束条件 $\begin{cases}x-3y\leqslant -4\\3x+5y\leqslant 30\\x\geqslant 1\end{cases}$，求线性目标函数 $z=2x-y$ 的最大值和最小值.

B　组

1．选择题：

（1）已知线性目标函数 $z=4x-y$，平移直线 $4x-y=0$，若在变量 x，y 的可行域上截距取得最大值 m，则该目标函数（　　）.

（A）取得最大值 m　　（B）取得最小值 m

（C）取得最大值 $-m$　　（D）取得最小值 $-m$

（2）原点 O 和点 $P(1, 1)$在直线 $x+y-a=0$ 的两侧，则 a 的取值范围是（　　）.

（A）$a<0$ 或 $a>2$　　（B）$a=0$ 或 $a=2$

（C）$0<a<2$　　（D）$0\leqslant a\leqslant 2$

（3）已知点 $P(x, y)$在不等式组 $\begin{cases}x-2\leqslant 0\\y-1\leqslant 0\\x+2y-2\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域上，若 $z=x-y$，则 z 的取值

范围是（　　）.

（A）[－2，－1]　　（B）[－2，1]　　（C）[－1，2]　　（D）[1，2]

2．填空题：

（1）若非负实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x+y-4\leqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\end{cases}$，则 $x+3y$ 的最大值是__________；

（2）设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\leqslant 2\\ x-y\geqslant -1\\ x+y\geqslant 1\end{cases}$，若 $z=2x+3y$，则 z 的最大值等于____________.

3．若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5\\ 3x+2y\leqslant 12\\ 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$，求使得目标函数 $z=6x+5y$ 取得最大值的点 $(x，y)$及目标函数的最值.

【知识链接】

1．某工厂生产 A，B 两种产品都要用到甲、乙两种原料，设购买甲原料 x 吨，购买乙原料 y 吨用于生产.（1）若购买总量不超过 100 吨，应满足条件_________；（2）若购买总量不超过 100 吨，其中购买甲原料不少于 50 吨，应满足条件_________.

2．小明现有 100 元的零花钱，他想买一个书包，其它用于买书本和玩具．若买一个书包花费 50 元，一件玩具花费 20 元，一本书花费 10 元，而且他想至少买一件玩具、至多买一本书．问小明有哪几种消费方案？设小明买 x 件玩具，y 本书，在直角坐标平面上画出购买方案 $(x，y)$对应的点.

19.4　线性规划问题的应用举例

【学习目标】

掌握在生活实际中，线性规划问题的简单应用.

【学法指导】

1．熟悉实际问题的情景，正确理解题意，准确找出线性约束条件.

2．规范画出可行域，在可行域上找出最优解.

例题赏析

例　某投资人打算投资甲、乙两个项目，根据预测，甲、乙项目可能的最大盈利率分别为

100%和 50%，可能的最大亏损为 30%和 10%，投资人计划投资不超过 10 万元，要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元．问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元，才可能使盈利最大？

分析：根据题意，首先设出甲、乙两个项目的投资变量分别为 x，y，然后得到线性约束条件和目标函数，再通过图解法求出目标函数的最大值．

解：设投资人分别将 x 万元投资于甲项目，y 万元投资于乙项目．

由题意知变量 x，y 满足的线性约束条件为：

$$\begin{cases} x+y\leqslant 10 \\ 0.3x+0.1y\leqslant 1.8 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases},$$

$$即\begin{cases} x+y\leqslant 10 \\ 3x+y\leqslant 18 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

线性目标函数为 $z=x+0.5y$．

在直角坐标平面上画出变量 x，y 满足的可行域，如图 19-13 所示．

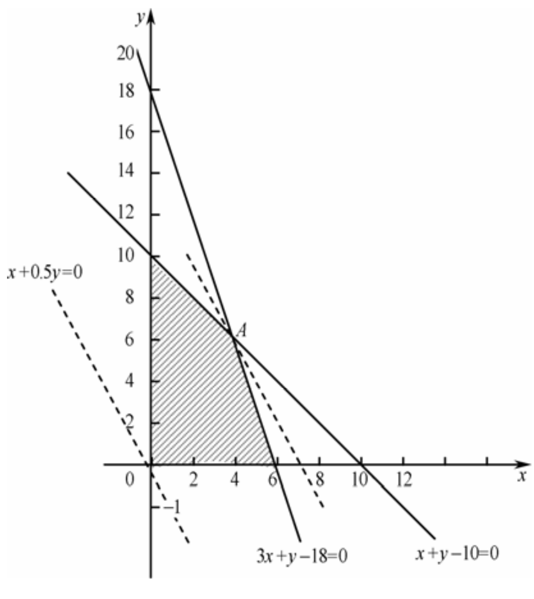


图 19-13

目标函数变为 $y=-2x+2z$，可知当 $2z$ 取得最大值时，z 取得最大值．

令 $z=0$，画出直线 $x+0.5y=0$，然后平移这条直线，可知当直线经过点 A 时，z 取得最大值．

因为 A 是直线 $x+y-10=0$ 和直线 $3x+y-18=0$ 的交点，

解方程组$\begin{cases} x+y-10=0 \\ 3x+y-18=0 \end{cases}$可得最优解 $A(4, 6)$．

所以，$z_{\max}=4+0.5\times 6=7$．

所以当 $x=4$，$y=6$ 时，z 取得最大值 7.

答：投资人用 4 万元资金投资甲项目、6 万元投资乙项目，才能在确保亏损不超过 1.8 万元的前提下，使盈利最大.

点拨：用线性规划的知识解决实际问题，难点是将实际问题转化为数学问题—建立线性规划数学模型．关键要根据题意设出变量、正确写出线性约束条件、找到线性目标函数，同时还要注意图解法的规范作图及解方程组求最优解.

易错易混问题剖析

1．在实际问题中，注意“至少”、“至多”等词语的含义，准确写出线性约束条件.

2．在实际问题中，注意最优解是否为整数解的隐含条件.

3．当目标函数转化为直线方程时，要注意直线在 y 轴上的截距取得最大值（或最小值）时，目标函数 z 取得的是最大值还是最小值.

例如：目标函数 $z=2x-y$ 变为直线方程 $y=2x-z$ 后，当直线在 y 轴上的截距取得最大值时，z 取到的是最小值.

【同步训练 19.4】

A　组

1．某企业拟用集装箱托运甲、乙两种产品，甲产品每件体积为 5m^3，重量为 2 吨，运出后可获利润 10 万元；乙产品每件体积为 4m^3，重量为 5 吨，运出后可获利润 20 万元．集装箱容积 $24\ \text{m}^3$，最多载重 13 吨，如何装箱托运可获最大利润？

2．某工厂生产 A，B 两种产品都要用到甲、乙两种原料，生产 1 吨 A 产品可获利 1 万元，需要消耗 0.8 吨甲原料和 0.5 吨乙原料；生产 1 吨 B 产品获利 1.5 万元，需要消耗 1 吨甲原料和 0.4 吨乙原料．已知该工厂现有甲、乙两种原料各 50 吨，在此情况下，如何安排生产可获得最大利润？最大利润是多少？

3．医院用甲、乙两种原料为手术后的病人配营养餐．甲种原料每 10g 含 5 单位蛋白质和 10 单位铁质，售价 3 元；乙种原料每 10g 含 7 单位蛋白质和 4 单位铁质，售价 2 元．若病人每餐至少需要 35 单位蛋白质和 40 单位铁质，试问应如何使用甲、乙原料，才能既满足营养又使费用最省？

B　组

1．甲、乙、丙三种药品中毒素 A，B 的含量及成本如表 19-2 所示.

表 19-2

	甲	乙	丙
毒素 A（单位/千克）	600	700	400
毒素 B（单位/千克）	800	400	500
成本（元/千克）	4	9	11

某药品研究所想用甲、乙、丙三种药品配成 100 千克的新药，并使新药品含有 A 毒素不超过 56 000 单位和毒素 B 不超过 63 000 单位．要使总成本最低，应如何配制？

2．某木器加工厂利用 90m^3 的方木和 600m^2 的五合板加工书桌和书橱，加工一张书桌需要方木 0.1m^3，五合板 2m^2，获利 80 元；加工一个书橱需要方木 0.2m^3，五合板 1m^2，获利 120 元．该木器加工厂如何生产获得的利润最大？最大利润是多少？

3．某厂生产一种产品，其成本为 27 元/kg，售价为 50 元/kg．生产中，每千克产品产生 0.3m^3 的污水，污水有两种排放方式：

方式一：直接排入河流；

方式二：经厂内污水站处理后排入河流，但受污水处理站技术水平的限制，污水处理率只有 85%．污水处理站最大处理能力是 0.9m^3/h，处理污水的成本是 5 元/m^3．

另外，环保部门对排入河流的污水收费标准是 17.6 元/m^3，且允许该厂排入河流中污水的最大量是 0.225m^3/h．那么该厂应选择怎样的生产与排污方案，可使其每小时获得最大收益？

【知识链接】

打开 Excel 的“工具”选项的菜单，单击其中的“加载宏”命令，打开“加载宏”的窗口，选中其中的“规划求解”，单击“确定”按钮．

将单元格 B2、C2、D3 分别作为变量 x，y 的解和最值 z 的输出区域，在单元格 D3 中，输入目标函数 $z=3x+4y$ 的公式“＝$B$2*B3＋$C$2*C3”．

19.5　用Excel解线性规划问题

【学习目标】

掌握用 Excel 的“规划求解”功能来解线性规划问题的应用．

【学法指导】

1．熟悉 Excel 的“规划求解”功能，掌握“规划求解”的操作步骤．

2．理解每一个操作步骤的原理，以加深“规划求解”的理解．

例题赏析

例 利用 Excel 的“规划求解”功能，求变量 x，y 满足线性约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 10 \\ 3x+y\leqslant 18 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 时，线性目标函数为 $z=x+0.5y$ 的最大值.

分析：在 Excel 中，利用“规划求解”功能，只需在相应单元格内输入变元 x，y 和目标函数及约束条件，计算机强大的运算能力可以告诉我们问题的结果.

解：利用 Excel 的“规划求解”功能，变量 x，y 满足线性约束条件时，线性目标函数 $z=x+0.5y$ 的最大值如表 19-3 所示.

1		x	y	计算值	条件限制
2	变元	4	6		
3	目标函数	1	0.5	7	
4	条件1	1	1	10	10
5	条件2	3	1	18	18
6	条件3	1	0	4	0
7	条件4	0	1	6	0

所以，当 $x=4$，$y=6$ 时，$z_{max}=7$.

点拨：牢固掌握“规划求解”的操作步骤，正确输入目标函数、约束条件是解题的基础，若求可行域内的整数解，继续添加“$B$2=整数”和“$C$2=整数”，即在约束条件中选择“int”.

易错易混问题剖析

1．在实际操作中，要注意熟悉每个单元格的含义，避免输入混乱.

2．输入目标函数的公式、添加约束条件要正确，防止出现错误.

3．最后求解的结果可以通过每个约束条件是否成立予以检验.

【同步训练 19.5】

A 组

1．利用 Excel 的“规划求解”功能，求变量 x，y 满足线性约束条件 $\begin{cases} 2x-y\leqslant 2 \\ x-y\geqslant -1 \\ x+y\geqslant 1 \end{cases}$ 时，线性目标函数为 $z=2x+3y$ 的最大值.

2．利用 Excel 的“规划求解”功能，求变量 x，y 满足线性约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x \\ x+y\geqslant 20 \\ y\leqslant 3x-6 \end{cases}$ 时，线性目标函数为 $z=2x+y$ 的最小值.

3．已知变量 x，y 都是整数，且满足线性约束条件 $\begin{cases} x-3y\leqslant -4 \\ 3x+5y\leqslant 30 \\ x\geqslant 1 \end{cases}$，利用 Excel 的“规划求解”功能，求线性目标函数 $z=2x-y$ 的最大值和最小值.

B　　组

1．已知点 $P(x,y)$在不等式组$\begin{cases} x-2\leqslant 0 \\ y-1\leqslant 0 \\ x+2y-2\geqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域上，设 $z=x-y$，利用 Excel 的"规划求解"功能，求 z 的取值范围.

2．若变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x+y\leqslant 5 \\ 3x+2y\leqslant 12 \\ 0\leqslant x\leqslant 3 \\ 0\leqslant y\leqslant 4 \end{cases}$，利用 Excel 的"规划求解"功能，求使得目标函数 $z=6x+5y$ 取得最大值的点(x,y)及目标函数的最值.

3．某农户有耕地 20 公顷，可采用甲、乙两种种植方式．甲种植方式每公顷需投资 280 元，每公顷投工 6 个，可获收入 1000 元；乙方式每公顷需投资 150 元，劳动 15 个工日，可获收入 1200 元．该户共有可用资金 4200 元、240 个劳动工日．问如何安排甲、乙两种方式的生产，可使总收入最大？利用 Excel 的"规划求解"功能求解.

综合练习 19

一、选择题：

1．如图 19-14 所示，不等式 $x+2y-4\leqslant 0$ 表示的平面区域是（　　）.

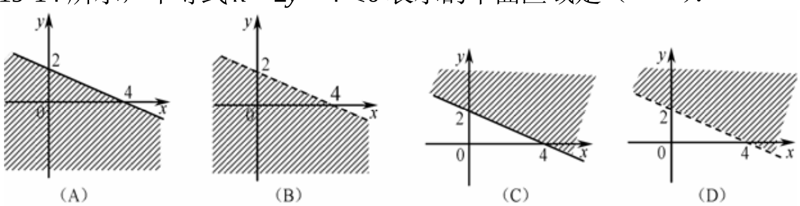


图 19-14

2．已知点 $A(x_0,y_0)$和点 $B(1,2)$在直线 l：$3x+2y-8=0$ 的异侧，则（　　）.

（A）$3x_0+2y_0>0$　　（B）$3x_0+2y_0<0$

（C）$3x_0+2y_0<8$　　（D）$3x_0+2y_0>8$

3．对于 x，y 的值都是不小于零的整数的点(x,y)中，满足 $x+y\leqslant 4$ 的点的个数为（　　）.

（A）6　　（B）15　　（C）10　　（D）5

4．若点 $M(x,y)$在不等式组$\begin{cases} x-2\leqslant 0 \\ y-1\leqslant 0 \\ x+2y-2\geqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域上，则 $z=2x-y$ 的取值范围是（　　）.

（A）$[-4,-1]$　　（B）$[-4,1]$

（C）[−1，4]　　（D）[1，4]

5．由圆$(x-1)^2+y^2=1$与平面区域$\begin{cases}y\leqslant\sqrt{3}(x-1)\\x\geqslant 0\end{cases}$所围成的图形的面积等于（　　）.

（A）$\frac{\pi}{2}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{12}$

6．若不等式组$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+3y\geqslant 4\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$所表示的平面区域被直线$y=kx+\frac{4}{3}$分成面积相等的两部分，则$k$等于（　　）.

（A）$\frac{7}{3}$　　（B）$\frac{3}{7}$　　（C）$\frac{4}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

7．已知D是由不等式组$\begin{cases}x-2y\geqslant 0\\x+3y\geqslant 0\end{cases}$所确定的平面区域，则圆$x^2+y^2=4$在区域$D$内的弧长为（　　）.

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{2\pi}{3}$　　（C）$\frac{3\pi}{4}$　　（D）$\frac{3\pi}{2}$

8．设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 3\\x-y\geqslant -1\\2x-y\leqslant 3\end{cases}$，则目标函数$z=2x+3y$的最小值为（　　）.

（A）6　　（B）7　　（C）8　　（D）23

9．在“家电下乡”活动中，某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇．现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用．每辆甲型货车运输费用 400 元，可装洗衣机 20 台；每辆乙型货车运输费用 300 元，可装洗衣机 10 台．若每辆车至多只运一次，则该厂所花的运费最少为（　　）.

（A）2 000 元　　（B）2 200 元　　（C）2 400 元　　（D）2 800 元

10．某企业生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨；生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨．销售每吨甲产品可获得利润 5 万元、每吨乙产品可获得利润 3 万元．该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨、B 原料不超过 18 吨．那么该企业可获得的最大利润是（　　）万元.

（A）12　　（B）20　　（C）25　　（D）27

二、填空题：

1．若点$P(a,4)$到直线$x-2y+2=0$的距离为$2\sqrt{5}$，且点在不等式$3x+y-3>0$的区域内，则实数a的值等于____________；

2．由直线$x+y+2=0$，$x+2y+1=0$和$2x+y+1=0$围成的三角形区域（包括边界）用不等式组可以表示为__________________；

3．在平面直角坐标系中，不等式组$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\x-y+2\geqslant 0\\x\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域的面积是____________.

4．设D是不等式组$\begin{cases}x+2y\leqslant 10\\2x+y\geqslant 3\\y\geqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$表示的平面区域，则$D$中的点$P(x,y)$到直线$x+y=10$距

离的最大值是__________．

三、解答题：

1．在直角坐标平面上画出下列不等式组表示的平面区域：

（1）$\begin{cases} x+2y-18\geqslant 0 \\ x-y+8\geqslant 0 \\ 2x+y-14\leqslant 0 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} 2x-y+2\geqslant 0 \\ x-2y+1\leqslant 0 \\ x+y-2\leqslant 0 \end{cases}$．

2．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 1 \\ x+2y\geqslant 1 \end{cases}$，用图解法求目标函数 $z=5x+y$ 的最大值．

3．某印刷厂用甲、乙两种不同型号的纸张，切成 A，B，C 三种规格的小纸张来印刷三种辅导书．甲、乙两种纸张每张分别切割后得到 A，B，C 三种规格小纸张的数量如表 19-4 所示．

表 19-4

	A	B	C
纸张甲	2	1	1
纸张乙	1	2	3

已知需要 A，B，C 三种规格的小纸张分别为 150 万张、180 万张、300 万张．要使切割的纸张数最少，两种规格的纸张各切割多少张？

4．某家具厂加工甲、乙两种大衣柜，每种大衣柜都要经过制作毛坯和上漆两道工序，该家具厂每天加工两种大衣柜的数量、生产能力和每个大衣柜的利润如表 19-5 所示．

表 19-5

	甲	乙	生产能力
毛坯（个/天）	6	12	120
上漆（个/天）	8	4	64
利润（个/元）	20	24	

如何安排这两种大衣柜的生产，使每天获得的利润最大？

思想火花

有恒心，有毅力，方能成.

第 20 章　复　　数

20.1　复数的概念

20.1.1　复数的有关概念

【学习目标】

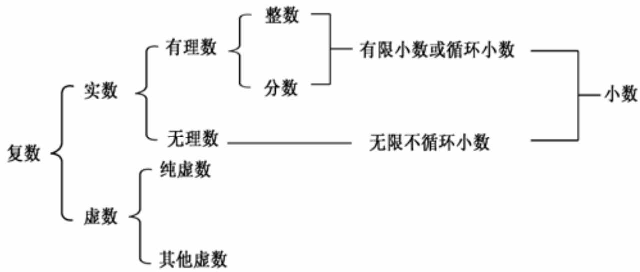
1．理解复数、虚数单位、复数的实部与虚部、虚数、纯虚数的概念；

2．弄清复数的分类；掌握复数相等的充要条件.

【学法指导】

1．掌握虚数单位 i 的两条性质，这是进一步掌握复数概念的基础.

2．了解数系的扩充过程，知道复数的分类：



3．熟练掌握以下结论：

（1）对于复数 $z=a+b\,\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），①当 $b=0$ 时，z 是实数；②当 $a=0$，$b\neq0$ 时，z 是纯虚数；③当 $b\neq0$ 时，z 是虚数.

（2）复数相等的充要条件：$a+b\,\mathrm{i}=c+d\,\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$（其中 a，b，c，d 都是实数）.

例题赏析

例　如果（$m-1$）+（m^2-2m）i＞0，求实数 m 的值.

分析：由两个不全是实数的复数不能比较大小可知，（$m-1$）+（m^2-2）i 应为实数，从而转化为实数不等式组求解.

解：由题意得

$$\begin{cases} m-1>0 \\ m^2-2m=0 \end{cases}$$

解得　$m=2$.

易错易混问题剖析

1．实数有正负之分，而虚数没有正负，如：3 i 不是正数，−5 i 也不是负数．

2．两个实数可以比较大小，但两个复数，如果不全是实数，它们之间就不能比较大小，只能说相等或不相等．

3．对于复数 $a+bi$，只有注明 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，才有 a 是实部，b 是虚部．解题时要注意仔细辨析题目所提供的条件．

例如对于 $x+i=0$，如果认为 $x\in\mathbf{R}$，就得到 x 无解的结论．事实上，$x=-i$ 是方程的一个解．

【同步训练 20.1.1】

A　　组

1．选择题：

（1）（$1+\sqrt{2}$）i 的实部是（　　）．

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$1+\sqrt{2}$　　（D）0

（2）如果 $z=m^2-1+(m+1)i$ 为纯虚数，则实数 m 的值为（　　）．

（A）1　　（B）−1　　（C）±1　　（D）0

（3）$a=0$ 是复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数的（　　）．

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2．填空题：

（1）复数 2 的虚部为__________；

（2）若 $a+i=1-bi$，则实数 a，b 的值分别为____________；

（3）若 $z=m+1+(m^2-1)i$ 为实数，则实数 m 的值为_________．

3．实数 x 取何值时，复数 $z=(x^2+x-2)+(x^2+3x+2)i$ 是（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数．

4．求适合下列方程中的实数 x 和 y 的值：

（1）$(x+y)-xyi=-5+24i$；

（2）$(3x-4)+(2y+3)i=0$．

B　　组

1．选择题：

（1）“复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为虚数”是“$b\neq0$”的（　　）．

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（2）设全集 $U=\{$复数$\}$，$M=\{$实数$\}$，$N=\{$纯虚数$\}$，则下列结论中正确的是（　　）．

（A）$M\cup N=U$　　（B）$\complement_U M=N$

（C）$M\cap\complement_U N=\varnothing$　　（D）$N\cup\complement_U N=U$

（3）下列命题正确的是（　　）．

（A）若 $a\in\mathbf{R}$，则 $(a+1)i$ 是纯虚数

（B）$5+i>2+i$

（C）两个复数不能比较大小

（D）实数集与虚数集的并集是复数集

2．填空题：

（1）复数（$2m^2-3m-2$）+（m^2-3m+2）i 表示纯虚数，则实数 m=________；

（2）如果 $m^2-(m^2-m)\mathrm{i}<1$，则实数 m 的值为________________；

（3）若 $x-1=(y+1)\mathrm{i}$，则实数 x，y 的值分别为________________.

3．已知 $z=(m^2-5m+6)+(m^2-3m-10)\mathrm{i}$，$(m\in\mathbf{R})$，求满足下列条件的 m 的值.

（1）z 是实数；

（2）z 是虚数；

（3）z 是纯虚数.

4．求使等式 $(2x+1)+\mathrm{i}=y+(3-y)\mathrm{i}$ 成立的实数 x，y 的值.

【知识链接】

1．填空题：

（1）在数轴上，实数与数轴上的点____________；

（2）在直角坐标平面上，有序实数对（a，b）与平面上的点_____________；

（3）在平面直角坐标系中，以坐标原点为始点的向量与该向量的终点_____

___________.

2．若向量 $\overrightarrow{OA}=(a,b)$，则 $|\overrightarrow{OA}|$=________________.

20.1.2　复数的几何意义

【学习目标】

1．理解复平面的概念，理解复数的几何意义；

2．理解复数的模和共轭复数的概念，会求复数的模和共轭复数；

3．掌握复数的模和共轭复数的性质.

【学法指导】

1．在复平面内用向量表示一个复数，给复数以直观的“形”，理解复数的几何意义有利于掌握复数知识及其应用.

2．复数模的几何意义：$|z|=|\overrightarrow{OZ}|$，即 Z 点到原点 O 的距离，一般地 $|z_1-z_2|$ 即 Z_1 点到 Z_2 点的距离.

3．关于共轭复数（1）设 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，即 z 与 $\overline{z}$ 的实部相等，虚部互为相反数（不能认为 $a+b\mathrm{i}$ 与 $-a-b\mathrm{i}$ 是共轭复数）.

（2）当 $b=0$ 时的特殊情况，即实轴上的点关于实轴本身对称，例如：5 和 5 也是互为共轭复数．当 $b\neq 0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭虚数．可见，共轭虚数是共轭复数的特殊情况.

例题赏析

例 1　设 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$），在复平面上画出满足下列条件的复数 z 对应点 Z 所表示的图形.

（1）$y>0$；　　　　（2）$|x|\leqslant 3$，且 $|y|<2$.

分析：有关复数 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$）对应点 Z 的图形，要掌握基本图形 $|z|=r$，是以原点为圆心，以 r 为半径的圆．同时要注意对复数的实部、虚部不同的要求，注意图形是否包含边界等.

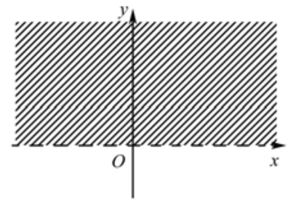


图 20-1

解：（1）因为 x，$y\in\mathbf{R}$，且 $y>0$，所以复数 z 对应点 Z 表示实轴上方所有点（不含实轴），如图 20-1 所示阴影部分.

（2）因为 $|x|\leqslant 3$，且 $|y|<2$，所以复数 z 对应点 Z 表示由 $x=\pm 3$，$y=\pm 2$ 四条直线围成的矩形 $ABCD$ 的内部及左右两边界的所有点，如图 20-2 所示阴影部分，包括边界 BC 和 AD，不包括边界 AB 和 CD.

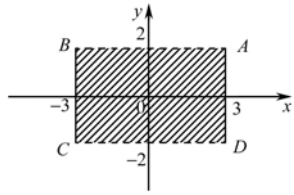


图 20-2

例 2　已知 $|z|=\dfrac{3}{2}$，z 的虚部为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求 $\bar{z}$.

分析：互为共轭复数的两个复数实部相等，虚部互为相反数．因此要求 $\bar{z}$，只要求出复数 z 即可.

解：设复数 $z=a+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$　（$a\in\mathbf{R}$），因为 $|z|=\dfrac{3}{2}$，

所以 $a^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$，即 $a^2=\dfrac{3}{4}$，解得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$ 或 $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$.

所以 $\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$ 或 $\bar{z}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$.

点评：此例也可以根据共轭复数的定义，直接设 $\bar{z}=x-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$　（$x\in\mathbf{R}$），再根据 $|z|=|\bar{z}|$ 求解.

易错易混问题剖析

1．复数的模和实数的绝对值不同，在实数中① $|x|^2=x^2$；② $|x|\geqslant a$（$a\geqslant 0$）$\Leftrightarrow$ $-a\leqslant x\leqslant a$；$|x|\geqslant a$（$a\geqslant 0$）$\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$，是恒成立的，而在复数范围内当 x 为虚数时就不成立.

2．复数集与复平面上的点注意事项：

（1）复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 中的 z，书写时小写，复平面内点 $Z(a, b)$ 中的 Z，书写时大写.

（2）复平面内的点 Z 的坐标是 (a, b)，而不是 $(a, b\mathrm{i})$，也就是说，复平面内的纵轴上的单位长度是 1，而不是 i.

【同步训练 20.1.2】

A　　组

1．选择题：

（1）复数 $a+b\mathrm{i}$（$a<0$，$b>0$）对应的点所在象限为（　　）.

（A）第一象限（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）以下四个命题：

① 若两个复数的模相等，则这两个复数相等；

② 若两个复数的实部相等，则这两个复数互为共轭复数；

③ 复数 5 的共轭复数是−5；

④ 若两个复数互为共轭复数，则它们的模相等．

其中正确命题的个数是（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3）复数（$\sqrt{3}$+1）i 的共轭复数是（　　）．

（A）$\sqrt{3}-i$　　（B）$-\sqrt{3}-i$

（C）$-\sqrt{3}+i$　　（D）−（$\sqrt{3}$+1）i

2．填空题：

（1）复数 $2+\sqrt{3}$的模是______________；

（2）复数 $1+\sqrt{3}i$ 的模是______________；

（3）若 $a\in\mathbf{R}$，$b<0$，则 $a+bi$ 的共轭复数是____________．

3．已知$|z|=5$，复数 z 的实部为 3，求 $\bar{z}$．

B　　组

1．选择题：

（1）若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq0$，则复数 $a+bi$ 与$-a+bi$ 对应的点（　　）

（A）关于 x 轴对称　　（B）关于 y 轴对称

（C）关于原点对称　　（D）关于直线 $y=x$ 对称

（2）下列说法正确的是（　　）

（A）两个共轭复数对应的向量一定不相等

（B）a 的共轭复数是 a

（C）若两个互为共轭复数的复数相等，则这两个复数是相等的实数

（D）若 x 轴是两个向量所成角的平分线，则这两个向量对应的复数为共轭复数

（3）复数（$\sqrt{3}$+1）i 的模是（　　）

（A）2　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$\sqrt{3}-1$　　（D）$\sqrt{3}+1$

2．填空题：

（1）复数 1+ i 对应的向量模长变为原来的 2 倍，所得向量对应的复数是_______；

（2）若 $z=5-12i$，则$|\bar{z}|$=_________；

（3）若向量$\overrightarrow{OZ}$对应的复数为−3+4i，则$\overrightarrow{OZ}$的相反向量对应的复数为___________．

3．满足$|z|=5(z\in\mathbf{R})$的 z 值有几个？这些复数对应的点在复平面上构成怎样的图形？满足$3<|z|<5(z\in\mathbf{C})$的复数 z 对应的点在复平面上将构成怎样的图形？

【知识链接】

1．已知向量 $\boldsymbol{a}$=(1，2)，$\boldsymbol{b}$=(3，5)，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$=_________；

2．已知向量 $\boldsymbol{a}$=(1，2)，$\boldsymbol{b}$=(3，5)，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$=_________．

20.2　复数的运算

20.2.1　复数的加法和减法

【学习目标】

1．掌握复数加法与减法法则；理解复数加法与减法的几何意义；

2．掌握复数加减法在几何中的应用.

【学法指导】

1．对于复数加法、减法的运算法则，可以类比多项式的合并同类项法来加深印象.

2．根据复数的几何意义，复数的加减法的几何意义满足向量的加法、减法法则及有关性质.

3．复数与几何密切相关，学习时注意体会．如：$|z-z_1|$的几何意义是复数 z 与 z_1 在复平面内对应点的距离，$|z-z_1|=1$ 表示以 z_1 对应的点为圆心，以 1 为半径的圆.

4．复数的模可以帮助我们表示出一些常用曲线方程.

如：圆：$|z-z_0|=r$；线段中垂线：$|z-z_1|=|z-z_2|$；

椭圆：$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$(其中$|z_1-z_2|<2a$)；

双曲线：$||z-z_1|-|z-z_2||=2a$(其中$|z_1-z_2|>2a$).

例题赏析

例 1　已知复数 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=1+2\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点分别为 A，B，求$\overrightarrow{AB}$对应的复数 z，z 在平面内所对应的点在第几象限？

解：$z=z_2-z_1=(1+2\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，

因为 z 的实部 $a=-1<0$，虚部 $b=1>0$，

所以复数 z 在复平面内对应的点在第二象限内.

点评：任何向量所对应的复数，都小于这个向量的终点所对应的复数减去始点所对应的复数所得的差．即$\overrightarrow{AB}$所表示的复数是 z_B-z_A．而$\overrightarrow{BA}$所表示的复数是 z_A-z_B，故切不可把被减数与减数颠倒.

例 2　复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=-2+\mathrm{i}$，$z_3=-1-2\mathrm{i}$，它们在复平面上的对应点是一个正方形的三个顶点，求这个正方形的第四个顶点对应的复数.

分析一：利用$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，求点 D 的对应复数.

解法一：设复数 z_1，z_2，z_3 所对应的点为 A，B，C，正方形的第四个顶点 D 对应的复数为 $x+y\mathrm{i}(x,\ y\in\mathbf{R})$，则：

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(x+y\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=(x-1)+(y-2)\mathrm{i};$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1-2\mathrm{i})-(-2+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}.$$

因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，即$(x-1)+(y-2)\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}x-1=1\\y-2=-3\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$.

故点 D 对应的复数为 $2-\mathrm{i}$.

分析二：利用原点 O 正好是正方形 $ABCD$ 的中心来解.

解法二：如图 20-3 所示，因为点 A 与点 C 关于原点对称，所以原点 O 为正方形的中心，于是

$(-2+\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=0$，所以 $x=2$，$y=-1$.

故点 D 对应的复数为 $2-\mathrm{i}$.

点评：根据题意画图得到的结论，不能代替论证，然而通过对图形的观察，往往能起到启迪解题思路的作用.

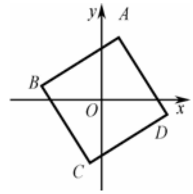


图 20-3

易错易混问题剖析

1．复数加减法的运算，关键是找准复数的实部与虚部.

2．应用复数减法的几何意义时，若 z_1 对应的向量为$\overrightarrow{OP_1}$，z_2 对应的向量为$\overrightarrow{OP_2}$，得到 z_1-z_2 对应的向量$\overrightarrow{P_2P_1}$ 后，要注意把此向量平移至始点为 O 的位置，使$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{P_2P_1}$，终点 Q 对应着复数 z_1-z_2.

【同步训练 20.2.1】

A　组

1．选择题：

（1）两个互为共轭复数的差是（　　）.

（A）实数　（B）复数　（C）纯虚数　（D）纯虚数或 0

（2）如果复数 z 满足 $z+\bar{z}=0$，则 z 是（　　）.

（A）0　（B）0 或纯虚数　（C）纯虚数　（D）实数

（3）若 x，$y\in\mathbf{R}$，$(x+y\mathrm{i})-(-1+2\mathrm{i})=0$，则 x，y 的值分别为（　　）.

（A）-1，2　（B）1，-2　（C）1，2　（D）-1，-2

2．填空题：

（1）计算：$(5-6\mathrm{i})+(-2-\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})=$__________；

（2）若 x，$y\in\mathbf{R}$，复数 $(x+y\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})$ 对应的点在第三象限，则 x，y 的取值范围是________；

（3）计算：$(1-2\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})+(3-4\mathrm{i})+\cdots+(20-21\mathrm{i})=$__________.

3．已知平行四边形的三个顶点 A，B，C 对应复数的分别为 $2\mathrm{i}$，$4-4\mathrm{i}$，$2+6\mathrm{i}$，求第四个顶点 D 对应的复数.

4．已知复数 $z_1=a^2-3+(a+5)\mathrm{i}$，$z_2=a-1+(a^2+2a-1)\mathrm{i}$ $(a\in\mathbf{R})$分别对应向量$\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$（O 为原点），若向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为纯虚数，求 a 的值.

B　组

1．选择题：

（1）若复数 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$）满足$|z-1-\mathrm{i}|=|z+1+\mathrm{i}|$，则 z 在复平面上对应点的轨迹方程为（　　）.

（A）$y=x$　　（B）$y=-x$　　（C）$x=0$　　（D）$y=0$

（2）若复数 z 满足$|z-1|+|z+1|=2$，则 z 在复平面上对应点的轨迹是（　　）.

（A）椭圆　　（B）圆　　（C）线段　　（D）射线

（3）△ABC 的三个顶点所对应的复数分别为 z_1，z_2，z_3，且 $|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|$，则△$ABC$ 是（　　）.

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形

（C）等腰直角三角形　　（D）等边三角形

2．填空题：

（1）设 $z_1=x+2\text{i}$，$z_2=3-y\text{i}$，（x，$y\in\mathbf{R}$），且 $z_1+z_2=5-6\text{i}$，则 $x+y\text{i}=$__________；

（2）已知$|z|=5$，且 $z+\bar{z}=6$，则复数 $z=$____________________；

（3）在复平面内，▱$ABCD$ 的顶点 A 为原点，顶点 B 对应的复数为 $3+2\text{i}$，顶点 D 对应的复数为 $2-4\text{i}$，则顶点 C 对应的复数为____________________.

3．已知 z_1 与 z_2 在复平面内对应的点关于 x 轴对称，$z_1=2+3\text{i}$，$z_2=z_1+2x-\text{i}$，求复数 x 的值.

【知识链接】

1．展开多项式：

（1）（$a+b$）（$c+d$）=______________；（2）（$a-b$）（$c-d$）=______________.

2．按多项式展开法则计算：

（1）（2+i）（1−i）=__________；（2）（3+4i）（4−3i）=_________________.

20.2.2　复数的乘法和除法

【学习目标】

掌握复数的乘法与乘方的运算；掌握虚数单位 i 的幂的运算规律；掌握复数的除法运算.

【学法指导】

1．复数的乘法运算，只需按多项式的乘法进行运算，但注意将 i^2 换成−1.

2．复数的二次、三次乘方运算可以直接应用完全平方、立方公式.

3．复数的除法不要死记公式，应掌握复数除法的计算原理：被除数和除数同乘以除数的共轭复数.

4．注意总结复数运算的规律.

（1）特殊复数的运算：①$(1+\text{i})^2=2\text{i}$；②$(1-\text{i})^2=-2\text{i}$；③$\dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}}=\text{i}$；

④$\dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}}=-\text{i}$.

（2）如果 $n\in N^*$有：$\text{i}^{4n}=1$；$\text{i}^{4n+1}=\text{i}$，$\text{i}^{4n+2}=-1$；$\text{i}^{4n+3}=-\text{i}$；$(1+\text{i})^2=2\text{i}$.

（3）复数的模有如下性质：

①$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$；②$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　（$z_2\neq 0$）；③ $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

例题赏析

例 1　计算下列各题：

（1）$(m+n\mathrm{i})(m-n\mathrm{i})$（$m$，$n\in\mathbf{R}$）；　　（2）$(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})\div(3-4\mathrm{i})$；

（3）$(1+\mathrm{i})^8-(1-\mathrm{i})^8$；　　（4）$\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{13}+\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{13}$.

分析：综合运用复数的乘法、乘方及除法进行运算，同时注意运用特殊复数的运算规律.

解：（1）因为 m，$n\in\mathbf{R}$，所以 $m+n\mathrm{i}$ 与 $m-n\mathrm{i}$ 互为共轭复数，

所以，$(m+n\mathrm{i})(m-n\mathrm{i})=m^2+n^2$.

（2）$(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})\div(3-4\mathrm{i})=(2+\mathrm{i}-4\mathrm{i}+2)\div(3-4\mathrm{i})=(4-3\mathrm{i})\div(3-4\mathrm{i})=\dfrac{(4-3\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\dfrac{24+7\mathrm{i}}{25}=\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}\mathrm{i}$；

（3）$(1+\mathrm{i})^8-(1-\mathrm{i})^8=[(1+\mathrm{i})^2]^4-[(1-\mathrm{i})^2]^4=(2\mathrm{i})^4-(-2\mathrm{i})^4=16-16=0$；

（4）$\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{13}+\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{13}=(-\mathrm{i})^{13}+(\mathrm{i})^{13}=-\mathrm{i}+\mathrm{i}=0$.

点拨：熟练掌握特殊复数的运算规律，能简化运算的过程，提高运算速度.

例 2　计算 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2007}$ 的值.

分析：一方面可以考虑利用 i 的幂的规律，另一方面可以考虑等比数列求和后再计算.

解：方法一：因为 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4=0$，

所以 $\mathrm{i}^5+\mathrm{i}^6+\mathrm{i}^7+\mathrm{i}^8=\mathrm{i}^4(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4)=0$，$\mathrm{i}^9+\mathrm{i}^{10}+\mathrm{i}^{11}+\mathrm{i}^{12}=\mathrm{i}^8(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4)=0$，……

$\mathrm{i}^{2001}+\mathrm{i}^{2002}+\mathrm{i}^{2003}+\mathrm{i}^{2004}=\mathrm{i}^{2000}(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4)=0$，

所以，原式$=\mathrm{i}^{2005}+\mathrm{i}^{2006}+\mathrm{i}^{2007}=\mathrm{i}^{2004}(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3)=\mathrm{i}-1-\mathrm{i}=-1$.

方法二：$\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2007}=\dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}^{2007})}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}^2=-1$.

点评：如果 i 的幂指数较小，用方法一比较直观简便；如果 i 的幂指数较大，用方法二比较简洁.

易错易混问题剖析

1．复数的乘除属于同一运算，一个复数除以另一个复数相当于这个复数乘以另一个复数的倒数．因此，要会熟练地求一个非零复数的倒数.

2．复数的乘法运算时，要注意将 i^2 换成-1 时符号的变化.

3．在复数的乘方运算中，整数指数的运算法则在实数范围内一样适用，但分数指数的运算法则不适用于复数.

【同步训练 20.2.2】

A　组

1．选择题：

（1）$\mathrm{i}^{2n-3}+\mathrm{i}^{2n-1}+\mathrm{i}^{2n+1}+\mathrm{i}^{2n+3}$ 的值为（　　）.

（A）-2　　（B）0　　（C）2　　（D）4

（2）复数 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^5$ 的值等于（　　）.

（A）i　　（B）$-\mathrm{i}$　　（C）1　　（D）-1

（3）计算（3+4i）÷（3−4i）的结果为（　　）.

（A）$\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$　　（B）$-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$　　（C）$\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$　　（D）$-\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$

2．填空题：

（1）复数 4+3i 的倒数是________________；

（2）（1+2i）（1−2i）=________________；

（3）（2+5i）（5+2i）=________________.

3．设 $z_1=2-i$，$z_2=1-3i$，求复数$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{5}\overline{z}_2$的虚部.

4．求满足（1+2i）$\overline{z}$ =4+3i 的复数 z.

B　　组

1．选择题：

（1）在复数集 **C** 中，方程 $3x-2=(4-x)i$ 的根为（　　）.

（A）1+i　　（B）1−i　　（C）−1−i　　（D）−1+i

（2）若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq0$，则（$a+bi$）（$b+ai$）一定是（　　）.

（A）正实数　　（B）负实数　　（C）纯虚数　　（D）不确定

（3）已知复数 $z=1-i$，则 $\frac{z^2}{z-1}$ =（　　）.

（A）2　　（B）−2　　（C）2i　　（D）−2i

2．填空题：

（1）使$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$为实数，则正整数 n 的最小值是__________；

（2）若 $f(z)=\frac{z^2-2z-3}{z+1}$，则 f（1+i）=_____________；

（3）若$|z_1|=5$，$z_2=3+4i$，且 $z_1\cdot z_2$ 是纯虚数，则 z_1=___________.

3．计算 $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$.

4．求适合方程$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}$=1+i 的实数 x，y 的值.

【知识链接】

1．若 $x\in\mathbf{C}$，且 $x^2=-4$，利用复数相等的充要条件求 x.

2．若 $x\in\mathbf{C}$，且 $x^2+x+1=0$，利用复数相等的充要条件求 x.

20.3　实系数一元二次方程的解法

【学习目标】

1．掌握实系数一元二次方程在复数集 **C** 中，当 $\varDelta\geqslant 0$ 时的解法；
2．掌握实系数一元二次方程在复数集 **C** 中，当 $\varDelta<0$ 时的解法；
3．掌握实系数一元二次方程当 $\varDelta<0$ 时，方程根的特点．

【学法指导】

1．实系数一元二次方程的求解，首先要对判别式 $\varDelta=b^2-4ac$ 的正负情况进行判断，然后确定所应用的公式．

2．实系数一元二次方程在复数范围内必有两个解：当$\varDelta\geqslant 0$ 时，有两个实根；当$\varDelta<0$ 时，有一对共轭虚根．即：（1）实系数一元二次方程有虚根必定成对出现；

（2）实系数一元二次方程 $ax^2+bx+\mathrm{c}=0$ 在复数范围内总有两个解 x_1，x_2，总可以进行因式分解：$ax^2+bx+\mathrm{c}=a(x-x_1)(x-x_2)$．

3．复数范围内，根与系数的关系仍成立：设实系数一元二次方程 $ax^2+bx+\mathrm{c}=0$ 的两个根为 x_1、x_2，则有 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$．

例题赏析

例　已知关于 x 的方程 $x^2+x+m=0$（$m\in\mathbf{R}$）有两个虚根 α，β，且$|\alpha-\beta|=3$，求实数 m 的值．

分析：方程是实系数一元二次方程，则两个虚根互为共轭复数．

解：设 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=a-b\mathrm{i}$，（a，$b\in\mathbf{R}$），

则$|\alpha-\beta|=|2b\mathrm{i}|=2|b|=3$，所以 $b=\pm\dfrac{3}{2}$．

由根与系数的关系得 $\alpha+\beta=-1=2a$，所以 $a=-\dfrac{1}{2}$．

所以，$m=\alpha\beta=a^2+b^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$．

点评：在复数集中，$|\alpha-\beta|^2\neq(\alpha-\beta)^2$，只有当 α，β 都是实数时等号才成立．

易错易混问题剖析

1．一元二次方程是中学数学的重要内容，要注意我们研究的是实系数的一元二次方程．关于虚系数的一元二次方程，我们没有涉及．

2．在复数范围内解实系数一元二次方程，不存在方程无解的情形．

【同步训练 20.3】

A　　组

1．选择题：

（1）在复数范围内，方程 $x^2+9=0$ 的根为（　　）．

（A）$3\mathrm{i}$　　（B）$-3\mathrm{i}$　　（C）± 3　　（D）$\pm 3\mathrm{i}$

（2）在复数范围内，方程 $x^2+x+1=0$ 的根为（　　）．

（A）$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　（B）$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　（C）$-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　（D）无解

（3）已知实数 a 满足 $-2<a<-\frac{1}{2}$，则方程 $z^2-2z+5-a^2=0$（　　）．

（A）有实根 （B）无实根 （C）有一个实根一个虚根 （D）没有根

2．填空题：

（1）方程 $x^2+2x-2=0$ 的解是________________；

（2）方程 $x^2+2x+2=0$ 的解是________________；

（3）设复数 z 满足 $z+|z|=2+\mathrm{i}$，则 z 等于_____________．

3．已知实系数一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根为 $2+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求这个方程的另一个根及 a，b 的值．

B　组

1．选择题：

（1）二次方程 $x^2-2x+5=0$ 的根的情况是（　　）．

（A）有两个不相等的实根

（B）有一个实数根，一个虚根

（C）有一对共轭的虚根

（D）有两个非共轭的虚根

（2）实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一对共轭虚根的充要条件是（　　）．

（A）$\Delta=b^2-4ac>0$　　（B）$\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$

（C）$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$　　（D）$\Delta=b^2-4ac<0$

（3）在复平面上，方程 $|z|^2+3|z|-4=0$ 所表示的轨迹是（　　）．

（A）四个点 （B）两条直线 （C）一个圆 （D）两个圆

2．填空题：

（1）若方程 $x^2+ax+2=0$（$a\in\mathbf{R}$）的一个根是 $1+\mathrm{i}$，则 $a=$______________；

（2）若 $3+4\mathrm{i}$ 和 $3-4\mathrm{i}$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根，则 a，b 的值分别为____________；

（3）若 z 是方程 $x+\frac{1}{x}+1=0$ 的一个根，则 $z^3=$_____________．

3．已知实系数一元二次方程 $2x^2+ax+b=0$ 的一个根为 $2\mathrm{i}-3$，求 a，b 的值．

【知识链接】

1．若 $\overrightarrow{OA}$ 的模为 5，$\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴的正半轴所成的角为 α，则 A 点的坐标为_______．

2．复数 $z=1+\mathrm{i}$ 的模为______，复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标为_______，若 $\overrightarrow{OZ}$ 与 x 轴的正半轴所成的角为 α，则 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标用 α 表示为_______________．

20.4　复数的三角形式

20.4.1　复数的三角形式

【学习目标】

理解复数的辐角和辐角主值的概念，理解复数的三角形式，熟练掌握复数的代数形式与三

角形式的相互转化．

【学法指导】

1．复数的辐角是以 x 轴的正半轴为始边，以复数对应的向量为终边的角定义的，这就决定了一个复数的辐角有无数多个，学习时可以类比三角函数中终边相同的角．

2．复数辐角的主值是指$[0，2\pi)$范围内的辐角，因此一个复数的辐角主值是唯一的．

3．将一个复数的代数形式转化为三角形式的步骤：（1）求模；（2）求辐角；（3）写出三角形式．

例题赏析

例　将下列复数化为复数的三角形式：

（1）$2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　（2）$\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}$．

分析：（1）将复数的代数形式化为复数的三角形式，应先求复数的模，再求复数的一个辐角（不一定求辐角主值），然后写出复数的三角形式；（2）$\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}$ 不符合复数的三角形式，这里要转化为 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 的形式．

解：（1）因为 $r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，

$\cos\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以，$\arg(2-2\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{5\pi}{3}$（或满足条件的一个辐角为$-\frac{\pi}{3}$），

所以，$2-2\sqrt{3}\mathrm{i}=4(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3})$．

或 $2-2\sqrt{3}\mathrm{i}=4[\cos(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{3})]$．

（2）因为 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$，

所以 $\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}$的三角形式为：$\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$．

易错易混问题剖析

1．注意区分复数的辐角和辐角主值的概念，辐角主值是辐角的特殊情形．

2．注意：复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$必须满足：

①r 为非负数；②同角；③括号中的实部为 $\cos\theta$，虚部为 $\sin\theta$；④连接符号“+”．因此，一个表示复数的式子能否叫做它的三角形式，不是只看它是否含有三角函数符号，而在于这个式子是否正确地给出了模、辐角及连接符号．

【同步训练 20.4.1】

A　组

1．选择题：

（1）若$\overrightarrow{OZ}=a+b\mathrm{i}$，复数 $a+b\mathrm{i}$ 的辐角是指（　　）．

（A）向量$\overrightarrow{OZ}$与 x 轴正方向所成的角

（B）向量$\overrightarrow{OZ}$与 x 轴所成的角

（C）以 x 轴的正半轴为始边，向量$\overrightarrow{OZ}$所在的射线为终边的角

（D）向量$\overrightarrow{OZ}$所在的象限角

（2）非零复数 $a+b\mathrm{i}$ 的辐角（　　）.

（A）只有一个

（B）只有两个

（C）有无数多个，这些值相差 π 的整数倍

（D）有无数多个，这些值相差 2π 的整数倍

（3）若非零复数 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $\arg z$ 的取值范围是（　　）.

（A）（0，2π）　（B）[0，2π）　（C）（0，2π]　（D）[0，2π]

2．填空题：

（1）正实数的辐角的主值是__________，负实数的辐角的主值是________；

（2）虚部为正实数的纯虚数的辐角的主值是____________，虚部为负实数的纯虚数的辐角的主值是____________.

3．求下列复数的辐角和辐角的主值：

（1）$\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$；　（2）$2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

4．把下列复数的代数形式化为三角形式：

（1）8；　（2）−5；　（3）4i；

（4）−7i；　（5）2+2i；　（6）2−2i.

B　组

1．选择题：

（1）下列复数中，符合复数的三角形式的是（　　）.

（A）$\cos\theta+\mathrm{i}\cos\theta$　（B）$\sin\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

（C）$\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$　（D）$\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

（2）复数 0 的辐角是（　　）.

（A）0　（B）π　（C）$\frac{\pi}{2}$　（D）不确定

（3）若非零复数 z 的辐角主值为 θ，则 $\bar{z}$ 的辐角主值为（　　）.

（A）$2\pi-\theta$　（B）$\pi-\theta$　（C）$-\theta$　（D）θ

2．填空题：

（1）复数 3−4i 的辐角所在的象限是____________；

（2）复数 $\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$的辐角主值是____________；

（3）复数$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的三角形式是________________；

（4）复数$-(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$的三角形式是________________.

3．若复数 $z=5-12i$ 的辐角主值为 α，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

4．把下列复数表示成代数形式.

（1）$2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$；（2）$6[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$；

（3）$2(\sin\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$；（4）$2(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6})$.

5．把复数$-2(\sin\frac{4\pi}{3}-i\cos\frac{4\pi}{3})$表示为复数的三角形式.

6．若 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）的三角形式为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，试写出 $z_1=b+ai$，$z_2=-a+bi$，$z_3=-a-bi$，$z_4=a-bi$ 的三角形式.

【知识链接】

1．复数 $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$对应的向量逆时针旋转 45° 后，对应的复数是_________.

2．计算：$(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

20.4.2　复数三角形式的乘法与乘方运算

【学习目标】

熟练掌握复数三角形式的乘法与乘方法则，理解并掌握复数乘法与乘方的几何意义.

【学法指导】

1．复数三角形式的乘法法则是在复数代数形式的乘法和两角和的余弦公式基础上推出的，掌握推导过程是掌握复数三角形式的乘法法则的有效途径.

2．复数三角形式的乘方法则即棣莫佛定理，是复数三角形式乘法的特殊情形.

3．复数乘法的几何意义，是复数几何意义的进一步研究，能从“形”上给复数的乘法运算以直观解释，是理解复数三角形式的乘法法则的有效手段.

4．复数乘法的几何意义，分两个步骤：把复数对应的向量（1）旋转；（2）伸缩.

例题赏析

例 1　若向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数$\sqrt{3}+i$，把向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点旋转 30°，模变为原来的 2 倍，得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$，求向量$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数（用代数形式表示）.

分析：根据复数乘法的几何意义，在复平面上，向量的旋转对应复数的乘法．把向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点旋转 30°，模变为原来的 2 倍，得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数就是将复数$\sqrt{3}+i$乘以复数 $2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$.

解：因为$(\sqrt{3}+i)\times 2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

$=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\times 2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

$=4(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

$=2+\sqrt{3}i$.

点拨：深刻理解复数乘法的几何意义是解决这类问题的关键.

例 2　计算：$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$.

分析：计算复数的高阶乘方运算一般使用棣莫佛定理.

解：$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{12}$

$=\cos\left(12\times\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(12\times\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\cos 8\pi+i\sin 8\pi$

$=1$.

易错易混问题剖析

复数三角形式的乘法法则，是在复数三角形式下成立的．一个复数如果不是三角形式而应用此法则是错误的．例如：$\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3\neq\sin\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$，请同学们自己验证.

【同步训练 20.4.2】

A　　组

1．选择题：

（1）若复数 $z=(1+i)(\sqrt{3}-i)$，则$|z|$等于（　　）.

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）3　　（D）4

（2）若 $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，$z_2=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，则 z_1z_2 的辐角主值为（　　）.

（A）$\frac{\pi}{2}$　　（B）π　　（C）$\frac{3\pi}{2}$　　（D）$\frac{5\pi}{12}$

（3）若 $z=1+i$ 对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$，则 zi 的对应的向量是将$\overrightarrow{OZ}$（　　）.

（A）顺时针方向旋转 90°　　（B）逆时针方向旋转 90°

（C）顺时针方向旋转 180°　　（D）逆时针方向旋转 180°

2．填空题：

（1）$(\cos42^\circ+\mathrm{i}\sin42^\circ)(\cos18^\circ+\mathrm{i}\sin18^\circ)=$________________；

（2）$(\cos50^\circ+\mathrm{i}\sin50^\circ)[\cos(-50^\circ)+\mathrm{i}\sin(-50^\circ)]=$_____________；

（3）$(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})^{24}=$__________；

（4）$(-\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})^{6}=$__________．

3．若向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数 4+3i，把$\overrightarrow{OZ}$绕原点 O 按逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$，得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$，求$\overrightarrow{OZ_1}$所表示的复数．

B　组

1．选择题：

（1）下列命题正确的是（　　）．

（A）两个非零复数相等的充要条件是模和辐角分别相等

（B）两个非零复数相等的充要条件是模和辐角主值分别相等

（C）如果 $\arg z=\theta$，则 $\arg(z^2)=2\theta$

（D）复数 z 和 $\bar{z}$ 的辐角主值互为相反数

（2）虚数 z 和 $\bar{z}$ 的辐角主值之和为（　　）．

（A）0　　（B）π　　（C）2π　　（D）0 或 2π

（3）将复数 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 所对应的向量绕原点按逆时针方向旋转角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$），所得到的向量对应复数−2，则 θ 等于（　　）．

（A）$\frac{\pi}{2}$　　（B）$\frac{5\pi}{6}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{3\pi}{2}$

2．填空题：

（1）$[-2(\cos30^\circ+\mathrm{i}\sin30^\circ)]^2=$________________________；

（2）$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^{12}=$________________________________；

（3）计算：$(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^n=-1$，$n$ 为非零整数，则 n 最小值为________；

（4）复数 $\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$经 n 次乘方后，所得幂等于它的共轭复数，则 n 的最小正整数为________________________．

3．用棣莫佛定理证明：$(1+\mathrm{i})^{4n}$（$n\in\mathbf{N}_+$）是实数．

4．化简：$(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})^6+(\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6})^{12}$．

【知识链接】

1．计算：$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\times\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})]=$________________．

2．计算：$(1+i)\div\dfrac{1}{1-i}=$______________________.

20.4.3　复数三角形式的除法运算

【学习目标】

掌握复数三角形式的除法法则；理解复数除法的几何意义.

【学法指导】

1．复数三角形式的除法法则是在乘法运算法则下推导出来的，是乘法运算的逆运算．因此，学习复数三角形式的除法要密切练习复数三角形式的乘法；

2．因为乘除互为逆运算，复数除法的几何意义和复数乘法的几何意义一样，也是把复数对应的向量（1）旋转；（2）伸缩.

例题赏析

例　已知正三角形的三个顶点对应的复数分别为 z_1，z_2，z_3，且 $z_1=1+i$，$z_2=-2+5i$，求复数 z_3.

分析：根据复数的几何意义，将向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$分别按逆时针、顺时针方向旋转 60°，都可以得到向量$\overrightarrow{Z_1Z_3}$，进而可求复数 z_3.

解：因为 $z_1=1+i$，$z_2=-2+5i$，则$\overrightarrow{OZ_1}=1+i$，$\overrightarrow{OZ_2}=-2+5i$，

所以$\overrightarrow{Z_1Z_2}=\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1}=(-2+5i)-(1+i)=-3+4i$，

若将$\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 按逆时针方向旋转 60°，得到向量$\overrightarrow{Z_1Z_3}$，

$$\begin{aligned}\text{则}\quad \overrightarrow{Z_1Z_2}&=(-3+4i)\times(\cos60°+i\sin60°)\\&=(-3+4i)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\left(-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)+\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i.\end{aligned}$$

于是，$\overrightarrow{OZ_3}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{Z_1Z_3}=(1+i)+\left[\left(-\dfrac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)+\left(2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i\right]$

$$=\left(-\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\right)+\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

若将$\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 按顺时针方向旋转 60°，得到向量$\overrightarrow{Z_1Z_3}$，

则$\overrightarrow{Z_1Z_3}=(-3+4i)\div(\cos60°+i\sin60°)$

$$=(-3+4i)\div\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)+\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

于是，$\overrightarrow{OZ_3}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{Z_1Z_3}=(1+i)+\left[\left(-\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)+\left(2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i\right]=\left(-\dfrac{1}{2}+2\sqrt{3}\right)+\left(3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$.

所以复数 $z_3=\left(-\dfrac{1}{2}-2\sqrt{3}\right)+\left(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$ 或 $z_3=\left(-\dfrac{1}{2}+2\sqrt{3}\right)+\left(3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$.

点拨：复数与几何密切相关．复数在复平面上可以用向量来表示，而向量的旋转又是复数的乘法、除法的几何意义，这在解决几何问题时经常应用．

易错易混问题剖析

复数三角形式的除法法则，也是在复数三角形式下成立的．一个复数如果不是三角形式而应用此法则是错误的．例如：$(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\div(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})\neq\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，请同学们自己验证．

【同步训练 20.4.3】

A　组

1．选择题：

（1）若复数 $z_1=3+4i$，$z_2=4+3i$，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模等于（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）若复数 $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，$z_2=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 的辐角主值是（　　）．

（A）$\frac{\pi}{24}$　　（B）$\frac{\pi}{12}$　　（C）$\frac{5\pi}{12}$　　（D）$\frac{7\pi}{12}$

（3）计算 $1\div(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$的结果为（　　）．

（A）$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$　　（B）$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

（C）$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$　　（D）$\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$

2．填空题：

（1）$(\cos79°+i\sin79°)\div(\cos19°+i\sin19°)=$________________；

（2）$2(\cos10°+i\sin10°)\div[\cos(-35°)+i\sin(-35°)]=$______________；

（3）$2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\div i=$________________；

（4）$i\div2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=$________________．

3．将对应于复数 $z_1=\sqrt{3}-3i$ 的向量$\overrightarrow{OZ_1}$，按顺时针方向旋转 60°后得到新向量$\overrightarrow{OZ_2}$，求$\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数 z_2．

B　组

1．选择题：

（1）复数 $z=1+\sqrt{3}i$，将它对应的向量绕原点按逆时针方向旋转 $\theta(0<\theta<2\pi)$角所得的向量对应的复数是-2，则 θ 等于（　　）．

（A）$\frac{\pi}{3}$　　（B）$\frac{5\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

（2）若复数 $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，$z_2=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 的辐角主值是（　　）．

（A）$\frac{23\pi}{12}$　（B）$\frac{11\pi}{12}$　　（C）$\frac{5\pi}{12}$　　（D）$\frac{\pi}{12}$

（3）计算 $i\div(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$的结果为（　　）.

（A）$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$　　（B）$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

（C）$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$　　（D）$\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$

2．填空题：

（1）非零复数 z 的辐角主值为 θ，则$\frac{1}{z}$的辐角主值为____________；

（2）正实数 z 的辐角主值为 θ，则$\frac{1}{z}$的辐角主值为____________；

（3）复数 z 对应的向量$\overrightarrow{OZ}$ 顺时针旋转$\frac{\pi}{4}$，得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$，则$\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数为 z 除以________________.

3．已知四边形 $OABC$ 是正方形，O 是坐标原点，A 对应的复数为 1+2i，求 B、C 两点对应的复数.

4．把复数$\frac{1+i\tan 15^\circ}{1-i\tan 15^\circ}$化为复数的三角形式.

【知识链接】

1．计算：$(-2i)^2=$________；$(2i)^2=$________.

2．求−4 的平方根.

20.4.4　复数的开方运算

【学习目标】

1．理解复数三角形式开方法则的推导过程；

2．熟记复数三角形式的开方法则，会对复数进行开方运算；

3．了解复数开方的几何意义.

【学法指导】

1．复数三角形式的开方法则是在乘方运算法则下推导出来的，是乘方运算的逆运算.

2．尽管复数的开方是复数乘方的逆运算，但是要注意一个非零复数开 n 次方根，有 n 个不同的值.

3．复数开 n 次方根的几何意义是：n 个方根均匀分布在以原点为圆心，以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆上.

例题赏析

例 1 求 1 的立方根，并在复平面上画出它们对应的向量.

分析：根据复数开方法则，1 的立方根有 3 个．首先将 1 化为复数的三角形式，然后根据开方法则求解.

解：因为 $1=\cos 0+i\sin 0$，所以 1 的立方根为：

$\cos\dfrac{0+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{0+2k\pi}{3}$（其中 k=0，1，2.）

所以，1 的立方根分别为：

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

即 1 的立方根分别为：

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

如图 20-4 所示.

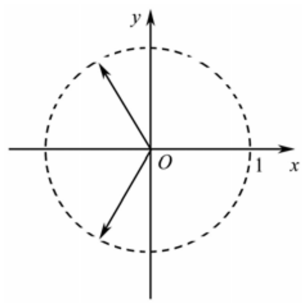


图 20-4

点拨：1 的立方根有 3 个，除 1 以外，还有一对共轭虚根：

$$\omega_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

由此，我们不难发现如下规律：

（1）$1+\omega_1+\omega_2=0$；

（2）$\omega_1^2=\omega_2$，$\omega_2^2=\omega_1$；

（3）$\bar{\omega}_1=\omega_2$，$\bar{\omega}_2=\omega_1$；$\omega_1\omega_2=1$.

（4）ω_1，ω_2 是方程 $x^2+x+1=0$ 的两个根.

例 2 设 $a\in\mathbf{R}^+$，求 $-a$ 的平方根.

分析：首先将 $-a$ 化为复数的三角形式，然后利用开方公式进行运算．也可以设出 $-a$ 的平方根，解方程组.

解法一：因为 $a\in\mathbf{R}^+$，$-a=a(\cos\pi+i\sin\pi)$，

所以，$-a$ 的平方根是 $\sqrt{a}\,(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{2})$（$k$=0，1）

即 $-a$ 的平方根是 $\sqrt{a}\,i$；$-\sqrt{a}\,i$.

解法二：设 $-a$ 的平方根是 $x+yi$，

则（$x+yi$）$^2=-a$，即 $x^2-y^2+2xyi=-a$，

根据复数相等的充要条件，得

$$\begin{cases}x^2-y^2=-a\\2xy=0\end{cases},$$

解得：$x=0$，　$y=\pm\sqrt{a}$.

所以，$-a$ 的平方根是 $\pm\sqrt{a}i$.

点评：方法二只适用于求非零复数的平方根，方法一适用于任何非零复数的开方运算.

易错易混问题剖析

一个非零复数三角形式开 n 次方的运算，要注意有 n 个不同的方根，在开方公式中，依次

让 k 取 0，1，2，…，$n-1$ 就可以得到．这些根的辐角依次相差$\frac{2\pi}{n}$，求解时注意检验求得的方根是否正确．

【同步训练 20.4.4】

A　　组

1．选择题：

（1）实数-1 的平方根为（　　）．

（A）i　　（B）$-$i　　（C）$\pm$i　　（D）± 1

（2）已知$|z|=32$，则 z 的 5 次方根的模为（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3）复数 0 的 n 次方根有（　　）．

（A）1 个　　（B）0 个　　（C）n 个　　（D）不确定

2．填空题：

（1）虚数 i 的平方根为________________；

（2）虚数$-$i 的平方根为________________；

（3）若 z 是 $1+\mathrm{i}$ 的平方根，则$|z|=$________________．

3．求-1 的立方根，并在复平面上画出它们对应的向量．

4．若 $\omega=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 是复数 z 的一个 5 次方根，求另外的四个 5 次方根．

B　　组

1．选择题：

（1）一个虚数的平方根对应的向量一定（　　）．

（A）关于 x 轴对称　　（B）关于 y 轴对称

（C）关于原点轴对称　　（D）无法确定

（2）已知一个非零复数的立方根，则它们的辐角主值从小到大依次相差（　　）．

（A）60°　　（B）120°　　（C）135°　　（D）150°

（3）下列命题中，正确的是（　　）．

（A）一个负实数的平方根是一对共轭纯虚数

（B）任何一个负实数开 n 次方，都没有实数根

（C）任何一个正实数开 n 次方，都没有实数根

（D）任何一个复数开 n 次方，都有 n 个不同的方根

（4）设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{13}$ 的值是（　　）．

（A）0　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　（C）$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　（D）$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2．填空题：

（1）若 1 是复数 z 的一个 4 次方根，则另外三个 4 次方根为____________；

（2）已知一个非零复数的六个 6 次方根，依次连接它们所对应向量的终点，构成的图形为____________________；

（3）一个非零复数的 n 次方根之和为__________.

3．解方程：$z^6=64$.

4．求复数 $z=-16(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$的 4 次方根.

【知识链接】

1．$a^m\cdot a^n=$______________；$a^m\div a^n=$____________；$(a^m)^n=$___________.

2．（1）$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=$____________________；

（2）$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\div(\cos\beta+i\sin\beta)=$____________________；

（3）$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=$____________________.

20.5　复数的指数形式

【学习目标】

1．理解复数的指数形式的含义；熟练掌握复数三角形式与复数指数形式的相互转化；

2．掌握复数指数形式的乘法、除法、乘方及开方运算.

【学法指导】

1．因为复数指数形式是复数三角形式的简便记法，所以在学习复数指数形式时要密切联系复数的三角形式.

2．复数三角形式的乘法、除法运算法则与指数的运算法则很类似，这是复数进行指数形式的乘法、除法、乘方及开方运算的基础，学习时注意体会.

例题赏析

例 1　将下列复数表示为复数的指数形式：

（1）1；　　（2）−1；　　（3）1+i；　　（4）$2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$.

分析：将一个复数表示为复数的指数形式，首先要将复数化为复数的三角形式.

解：（1）因为 $1=\cos0+i\sin0$，所以 1 的指数形式为：e^{i0}；

（2）因为 $-1=\cos\pi+i\sin\pi$，所以−1 的指数形式为：$e^{i\pi}$；

（3）因为 $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$，所以 1+i 的指数形式为：$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$；

（4）因为 $2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})=2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$，所以 $2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$的指数形式为：$2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$.

点评：复数的指数形式是复数三角形式的简便记法，将一个复数正确地化为三角形式是化为指数形式的基础.

例2　已知 $z_1=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$，$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$，求下列各式的值：

（1）$z_1 z_2$；（2）$z_1\div z_2$；（3）$(z_2)^3$；（4）z_1 的平方根.

分析：复数指数形式的乘法、除法、乘方及开方运算，既符合复数三角形式的运算法则又类似于指数的运算法则.

解：（1）$z_1 z_2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$；

（2）$z_1\div z_2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\div2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$；

（3）$(z_2)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3=2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\times3}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$；

（4）z_1 的平方根是：$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(2k\pi+\frac{\pi}{3})}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\pi+\frac{\pi}{6})}$，（其中 $k=0$，1），即 z_1 的平方根是：$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$，$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.

易错易混问题剖析

复数指数形式的开方运算和指数式的开方运算不完全相同．在复数指数形式的开方运算时，要注意对辐角加 $2k\pi$ 后再运用指数式的开方法则，同时注意结合复数三角形式的开方法则，令 $k=0$，1，2，…，$n-1$，得到 n 个不同的根.

【同步训练 20.5】

A　　组

1．选择题：

（1）复数 $3(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$的指数形式是（　　）.

（A）$3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$　（B）$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$　（C）$5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$　（D）$6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

（2）复数$-2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$的指数形式是（　　）.

（A）$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$　（B）$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{3})}$　（C）$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$　（D）$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

（3）复数 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{6})}$ 的三角形式是（　　）.

（A）$2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$　（B）$2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$

（C）$-2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$　（D）$2[\cos(-\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{6})]$

2．填空题：

（1）复数 $1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的指数形式是________________；

（2）复数 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{3})}$ 运算结果的代数形式为______________；

（3）复数$\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\div\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{3})}$ 运算结果的三角形式为______________.

3．设 $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$，计算下列各式的值：

（1）z^4；　　（2）z 的四次方根.

B　　组

1．选择题：

（1）复数 $3(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$的指数形式是（　　）.

（A）$3e^{i\frac{\pi}{4}}$　　（B）$3e^{i(-\frac{\pi}{4})}$　　（C）$3e^{i\frac{\pi}{3}}$　　（D）$3e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

（2）将复数 $e^{i\frac{\pi}{4}}$ 对应的向量$\overrightarrow{OZ}$ 按逆时针方向旋转 90°，模变为原来的 2 倍，得到向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，则向量$\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数为（　　）.

（A）$2e^{i\frac{\pi}{4}}$　　（B）$2e^{i\frac{\pi}{2}}$　　（C）$2e^{i\frac{3\pi}{4}}$　　（D）$2e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

（3）复数$-4e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ 对应的三角形式是（　　）.

（A）$-4[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]$　　（B）$4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

（C）$-4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$　　（D）$4(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

2．填空题：

（1）实数 a（$a<0$）的指数形式是____________；

（2）虚数$-2i$ 的指数形式是____________；

（3）复数 $3e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i(-\frac{\pi}{4})}\div\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ 运算的结果为______________.

3．用复数的指数形式求 $1-i$ 的立方根.

综合练习 20

一、选择题：

1．“复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数”是“$b\neq0$”的（　　）.

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2．已知下列四个命题：

① 两个复数相等的充要条件是它们的模相等且辐角相等；

② 两个共轭复数的积一定是正实数；

③ 两个共轭复数的差一定是纯虚数；

④ 若两个复数的和为实数，则它们为共轭复数.

其中真命题的个数是（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3．已知复数 z 满足$(|z-1|+|z+1|)=4$，则复数 z 在复平面内的对应点的集合是（　　）．

（A）圆　　（B）椭圆　　（C）双曲线　　（D）线段

4．若（m^2-m）+（m^2-3m+2）i 是纯虚数，则实数 m 的值为（　　）．

（A）1　　（B）1 或 2　　（C）0　　（D）-1，1，2

5．已知方程 $x^2+px+q=0$ 的一个解是 $1-2\mathrm{i}$，则实数 p，q 的值为（　　）．

（A）-2，-5　　（B）2，5　　（C）-2，5　　（D）2，-5

6．$\triangle ABC$ 的三个顶点所对应的复数分别为 z_1，z_2，z_3，且复数 z 满足$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|$，则 z 所对应的点是$\triangle ABC$ 的（　　）．

（A）内心　　（B）外心　　（C）重心　　（D）垂心

7．对于复数 $z=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2\,000}+\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2\,000}$，下列结论正确的是（　　）．

（A）z 是正实数　　（B）z 是负实数

（C）z 是虚数　　（D）z 是纯虚数

8．复数 $\sin 60°-\mathrm{i}\cos 60°$ 的辅角主值是（　　）

（A）60°　　（B）120°　　（C）240°　　（D）330°

9．若复数$-2+\mathrm{i}$ 和$-3+\mathrm{i}$ 的辐角主值分别为 α 和 β，则 $\alpha+\beta$ 等于（　　）．

（A）135°　　（B）300°　　（C）315°　　（D）330°

10．复数 $\sin\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{6}$的模是（　　）．

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\sqrt{2}$

11．把复数$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按逆时针旋转 60°，所得向量对应的复数是（　　）．

（A）-2　　（B）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（C）2　　（D）$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

12．复数 $z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，则复数 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内对应的点在（　　）．

（A）第一象限　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

13．复数 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点是 Z_1，$\bar{z}$ 在复平面内对应的点是 Z_2，O 是原点，则$\triangle OZ_1Z_2$是（　　）．

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形

（C）等边三角形　　（D）等腰直角三角形

14．$\mathrm{i}^{4n}+\mathrm{i}^{4n+1}+\mathrm{i}^{4n+2}+\mathrm{i}^{4n+3}$（$n\in\mathbf{Z}$）的值等于（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）-1　　（D）2

15．在下列复数中，是复数的三角形式的是（　　）．

（A）$2(\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})$　　（B）$2(\sin\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{4})$

（C）$2[\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{4})]$　　（D）$-2(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})$

16．计算$\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{12}$的结果为（　　）．

（A）-1　　（B）1　　（C）$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　（D）$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

17．若 $z_1=\cos100°+\mathrm{i}\sin100°$，$z_2=\sin100°+\mathrm{i}\cos100°$，则$\dfrac{z_1}{z_2}$的辐角主值是（　　）．

（A）0°　　（B）200°　　（C）110°　　（D）60°

18．复数 $z=(m+\mathrm{i})^2$ 的辐角主值是$\dfrac{3\pi}{2}$，则实数 m 的值是（　　）．

（A）1　　（B）−1　　（C）$-\sqrt{2}$　　（D）$-\sqrt{3}$

19．已知复数 $z=\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta$，则 z 的指数形式是（　　）．

（A）$e^{\mathrm{i}\theta}$　　（B）$e^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{2})}$　　（C）$e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\theta)}$　　（D）$e^{\mathrm{i}(-\theta)}$

20．将复数 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 所对应的向量绕原点逆时针旋转角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$），所得向量对应的复数为$-2\mathrm{i}$，则 θ 等于（　　）．

（A）$\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{7\pi}{6}$　　（D）$\dfrac{3\pi}{2}$

二、填空题：

1．使 $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n$ 为实数的最小正整数 n 的值为____________．

2．设 $z=\cos120^\circ+\mathrm{i}\sin120^\circ$，则$|z+z^2+z^3+\cdots+z^{10}|=$________________．

3．把复数 $6e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{3})}$ 化为代数形式为__________________．

4．若 i 是虚数单位，计算：$\dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{16\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})}=$________．

三、解答题：

1．已知 $z=\dfrac{(3+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}$，求$|z|$.

2．已知 A，B，C 为△ABC 的内角，若$\dfrac{\sin A+\mathrm{i}\cos A}{(\sin B+\mathrm{i}\cos B)(\sin C+\mathrm{i}\cos C)}$ 是一个纯虚数，试判断△ABC 的形状.

3．已知 $z^5=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，求 z 的值.

4．在复平面内，已知等边三角形的两个顶点所对应的复数分别为 2，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求第三个顶点对应的复数.

思想火花

来而不可失者时也，蹈而不可失者机也。。

第 21 章　概率分布初步

21.1　排列与组合

21.1.1　排列与排列数公式

【学习目标】

1．了解排列和排列数的定义，能根据问题的具体情况，写出符合要求的排列.

2．掌握排列数公式，并能利用它计算排列数.

3．会求解简单的排列问题.

【学法指导】

本节内容主要为排列的概念，排列数及排列数公式和排列的简单应用，在本节的学习中，应透彻理解排列的定义，紧紧抓住“顺序”这一关键，即，同样的几个元素，只要顺序有变化就是不同的排列.

例题赏析

例 1　写出从四个元素 a,b,c,d 中任取两个元素的所有排列.

分析：从四个元素中任取两个元素的所有排列的个数是：$A_4^2=4\times3=12$（个）. 要有步骤地写出，防止重复或遗漏.

解：ab，ac，ad，ba，bc，bd，ca，cb，cd，da，db，dc .

例 2　由数字 0，1，2，3，4 可以组成多少个无重复数字的三位数？

分析：要组成一个三位数就是从所给数字中取 3 个，分别排在百位、十位和个位. 显然与所取数字及其排列顺序有关，是排列问题，但由于 0 不能排在首位，是有限制条件的排列问题，解决此类问题通常有三种方法：①先排特殊位置，如，百位；②先排特殊元素；③先排列后排除不符合条件的情况.

思路 1：特殊位置先排.

解法 1：第一步排百位，从数字 1，2，3，4 中任取一个，有 4 种方法. 第二步排其他位置，从剩下的 4 个数字中选 2 个，排在十位和个位，有 A_4^2种方法. 根据分步计数原理共可组成 $4\times A_4^2=48$ 个不同的三位数.

思路 2：特殊元素先排.

解法 2：第一类不含数字 0 的三位数有 A_4^3个；第二类含数字 0 的三位数有 $A_2^1A_4^2$个；根据加法原理共可组成 $A_4^3+A_2^1A_4^2=48$ 个不同的三位数.

思路 3：先排列后排除.

解法 3：从由 0，1，2，3，4 五个元素中任取三个元素的所有排列中，去掉 0 在百位时的情况．共有 $A_5^3-A_4^2=48$ 个不同的三位数.

点拨：解法 1 和解法 2 称为直接解法；解法 3 称为间接解法．这 3 种解法在解排列组合应用题中经常用到，应熟练掌握.

例 3　4 男 4 女共 8 名同学排成一排照相.

(1) 4 位女生排在一起，有多少种排法？

(2) 4 位女生互不相邻，有多少种排法？

(3) 男、女生相互隔开，有多少种排法？

(4) 两端不排女生有多少种排法？

分析：（1）要使 4 位女生排在一起，可先把她们排好，再当作一个整体（不拆开）与其余 4 个男生排列即可（捆绑法）.

（2）要使 4 位女生互不相邻，则每两位女生中间至少有一名男生，用男生把女生隔开，因此，可先排男生，再让 4 名女生分别插入男生队伍的两端或中间的 5 个位置（插空法）.

（3）要使男女生相互隔开，则实际只有两种排法：

男女　男女　男女　男女

女男　女男　女男　女男

（4）两端不排女生，则只能排男生，因此可先排两端（在男生中选两人），再把其他人在中间 6 个位置上任意排（特殊位置先排法）.

解：(1) 第一步，4 名女生排成一排，有 A_4^4种排法；第二步，排好的 4 名女生当作一个整体，与其余 4 名男生，共 5 个元素进行排列，有 A_5^5种排法，由分步计数原理，共有不同排法 $A_4^4\times A_5^5=24\times120=2880$ 种.

(2) 第一步，先把 4 名男生排成一排，有 A_4^4种排法，第二步，再把 4 名女生插入男生队伍中间（或两端）的 5 个位置上，共有 A_5^4种排法．由分步计数原理，共有不同排法 $A_4^4\times A_5^4=24\times120=2880$ 种.

(3) 男、女生相互隔开的排法分两类：

第一类：男生在奇数位，女生在偶数位，共有 $A_4^4\times A_4^4=576$ 种.

第二类：女生在奇数位，男生在偶数位，共有 $A_4^4\times A_4^4=576$ 种.

由分类计数原理，共有不同排法 $576+576=1\,152$ 种.

(4) 只有两端排男生，应分两步：第一步，在 4 名男生中任选 2 人排在两端，有 A_4^2种排法；第二步，中间 6 个位置，其余 6 人可任意排，共有 A_6^6种排法，由分步计数原理，共有不同排法 $A_4^2\times A_6^6=12\times720=2\,160$ 种.

点拨：1．排队是常见的排列问题之一，其中有条件的排列问题要根据限制条件，制定解题策略：确定是分类计数还是分步计数．先后顺序如何．是采用直接法还是间接法计算等等．常用的方法有“捆绑法”、“插空法”、“先特殊后一般”等.

【同步训练 21.1.1】

A　组

1．填空题：

（1）一般地，从 n 个不同元素中，任取 m 个元素，按照一定的顺序排成一列叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个________；如果 $m<n$，这样的排列叫做________；如果 $m=n$，这样的排列叫做________.

（2）$A_5^3=$__________；$A_6^6=$__________.

（3）用数字 1，2，3，4 可组成_______个没有重复数字的两位偶数.

（4）8 个儿童站成一排照相，可以有不同的排法种数是________.

2．选择题：

（1）5 本不同的书借给甲、乙、丙三人，每人一本，不同的借法有（　　）.

（A） 10 种　（B）60 种　（C）125 种　（D）243 种

（2）A、B、C 三地之间有直达的火车，需要准备车票种数是（　　）.

（A） 6　（B）3　（C）2　（D）1

（3）从 10 名同学中，选班长、副班长、团支书各一人共有选法（　　）.

（A） 720 种　（B）120 种　（C）360 种　（D）60 种

（4）由数字 0，1，2，3 可组成没有重复数字的三位数的个数是（　　）.

（A）12　（B）18　（C）24　（D）27

3．从字母 a、b、c、d 中每次取出 3 个的排列一共有多少？并全部写出来.

B　组

1．选择题：

（1）乘积 $m(m+1)(m+2)\cdots(m+19)$可表示为（　　）.

（A）A_m^9　（B）A_m^{20}　（C）A_{m+19}^{19}　（D）A_{m+19}^{20}

（2）5 个人站成一排照相，甲不排两端的排法有（　　）.

（A） 120 种　（B）60 种　（C）72 种　（D）48 种

（3）5 名同学站成一排照相，其中甲乙两人必须站在一起的排法种数有（　　）.

（A）$A_3^3\ A_2^2$　（B）$3A_2^2$　（C）A_3^3　（D）$A_2^2\ A_4^4$

（4）一次晚会有 5 个歌唱节目，3 个舞蹈节目，要使舞蹈节目不连在一起，不同的出场次序共有（　　）.

（A）$A_3^3\ A_6^6$　（B）$A_3^3\ A_5^5$　（C）$A_4^3\ A_5^5$　（D）$A_6^3\ A_5^5$

2．填空题：

（1）由数字 1，2，3 可组成没有重复数字的自然数的个数是_________.

（2）由数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字五位数，其中组成五位偶数的概率是_________.

3．6 件不同的商品陈列在橱窗内，将它们排成一列.

（1）如果甲、乙两种商品要分别放在两端，有多少种排法？

（2）如果甲、乙两种商品都不放在两端，有多少种排法？

（3）如果甲、乙两种商品要放在相邻的位置上，有多少种排法？

（4）如果甲、乙两种商品不能放在相邻的位置上，有多少种排法？

【知识链接】

北京、青岛、济南三个民航站之间的直达航线，有多少种不同机票票价？（3 种）

21.1.2　组合与组合数公式

【学习目标】

1．理解组合的意义，弄清组合与排列的区别与关系．

2．掌握组合数公式及组合数的性质和应用；弄清组合数与排列数的区别与联系．

3．会应用组合及组合数公式解决简单的组合问题．

【学法指导】

对比排列的概念理解组合的意义，抓住这两个概念的联系与区别：排列与组合都是从 n 个不同元素中任取 m 个元素，排列中的元素有顺序，而组合中的元素无顺序．

例题赏析

例 1　计算 $2C_9^6 - C_9^3 + C_9^2$．

分析：利用组合数公式及性质．

解：原式 $= 2C_9^3 - C_9^3 + C_9^2 = C_9^3 + C_9^2 = C_{10}^3 = 120$．

例 2　现有数控技术应用专业学生 5 名，汽车运用与维修技术专业学生 4 名．

（1）从两个专业中选 2 名学生去参加会议，有多少种不同选法？

（2）分别从两个专业中各选 2 名学生去参加会议，有多少种不同的选法？

解：（1）选两名学生不分专业，即从 9 名学生中任选 2 名学生有 $C_9^2 = 36$ 种不同选法．

（2）必须从每个专业中各选 2 名，因此，需分步进行：先从数控技术应用专业的学生中选出 2 名，有 C_5^2 种方法，再从汽车运用与维修技术专业的学生中选 2 名，有 C_4^2 种方法．根据分步计数原理有 $C_5^2 \times C_4^2 = 60$ 种不同的选法．

易错易混问题剖析

组合与排列的区别是：排列要求在取出元素后按照一定的顺序排成一列，即与顺序有关；组合要求取出后“不管顺序怎样都并成一组”．也就是说，对于取出的 m 个元素，如果只改变它们之间的相对位置，而不改变元素本身，那么它们是不同的排列，却是同一个组合．在处理问题时一定要区分清楚．

【同步训练 21.1.2】

A　组

1．填空题：

（1）一般地，从 n 个不同元素中，任取 m（$m\leqslant n$）个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个_________.

（2）从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的_________.

（3）$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=$______________________.

（4）$\mathrm{C}_n^m=$________.（对称性）

（5）$\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=$________.

（6）从 2，3，4，5，6，7 这六个数中任取两个数相乘，可以得到________个不同的积.

（7）某年级 6 个班举行篮球单循环比赛，共需举行_______场比赛.

（8）$\mathrm{C}_7^3-\mathrm{C}_6^2=$________.

2．选择题：

（1） 从 5 名同学中推选 4 人去参加一个会议，不同的推选方法的总数有（　　）.

（A） 10 种　　（B）5 种　　（C）4 种　　（D）1 种

（2）平面内有 10 个点，其中任意三点都不在一条直线上，以任意三点为顶点画三角形，一共可画三角形的个数为(　　).

（A） 720　　（B）120　　（C）240　　（D）360

（3）已知 $\mathrm{C}_n^2=10$，则 n 的值等于（　　）.

（A）10　　（B）5　　（C）3　　（D）2

（4）$\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2$ 的值等于（　　）.

（A）2　　（B）5　　（C）10　　（D）15

3．现有 1 元，5 元，10 元，20 元的纸币各一张，问可以组成几种不同的币值？

B　组

1．选择题：

（1）C_{200}^{198}的值等于（　　）.

（A）39 800　　（B）19 900　　（C）3 980　　（D）1 990

（2）$\mathrm{C}_{2003}^2+\mathrm{C}_{2003}^3$的值等于（　　）.

（A）C_{2004}^4　　（B）C_{2004}^3　　（C）C_{2004}^2　　（D）C_{2003}^4

（3）从 10 名同学中推选 5 人去参加一个会议，其中甲、乙两人有且仅有 1 人参加，则选法种数是（　　）.

（A）C_8^4　　（B）C_{10}^5　　（C）$\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_9^4$　　（D）$\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_8^4$

（4）某校一年级有 5 个班，二年级有 8 个班，三年级有 3 个班，分年级举行班与班之间的

篮球单循环赛，总共需要进行比赛的场数是(　　).

（A）$C_5^2+C_8^2+C_3^2$　　（B）$C_5^2C_8^2C_3^2$　　（C）$A_5^2+A_8^2+A_3^2$　　（D）C_{16}^2

2．填空题：

（1）$C_{30}^{28}+C_{30}^{29}=$__________.

（2）已知 $C_8^x=C_8^{x-4}$，则 $x=$__________.

3．某医院有内科医生 12 名，外科医生 8 名，要选派 5 名参加赈灾医疗队，其中：

（1）某内科医生必须参加，某外科医生不能参加，有多少种选法？

（2）至少有一名内科医生和至少有一名外科医生参加的选法有多少种？

【知识链接】

填空

$(a+b)^1=$___________;

$(a+b)^2=$___________;

$(a+b)^3=$___________;

$(a+b)^4=$___________.

请观察这 4 个展开式，说说它们有哪些规律.

21.2　二项式定理

21.2.1　二项式定理

【学习目标】

熟练掌握二项式定理及其应用.

【学法指导】

学习二项式定理，首先应掌握二项定理的结构特征，其次熟练掌握二项式定理的通项公式，这是求解二项展开式中某项的关键.

例题赏析

例　求 $(2x^2-\dfrac{1}{x})^6$ 的二项展开式中的常数项.

分析：解决常数项的关键在于利用通项公式求常数项是展开式的第几项.

解：由通项公式 $T_{m+1}=C_n^m a^{n-m}b^m$，得

$$T_{m+1}=C_6^m(2x^2)^{6-m}(-\frac{1}{x})^m=C_6^m 2^{6-m}(-1)^m x^{12-3m},$$

要使其成为常数项，则 $12-3m=0$，可得 $m=4$，

故常数项为 $T_5=\ C_6^4 2^2(-1)^4=\ C_6^2 2^2=60$.

易错易混问题剖析

二项展开式中某一项的系数与该项的二项式系数是两个不同的概念，例如在$(1+2x)^7$ 的二项展开式中，其第 4 项 $T_4=C_7^3 1^{7-3}(2x)^3$，其二项式系数是 $C_7^3=35$；而第 4 项的系数是指 x^3 的系数，应是 $8C_7^3=280$.

【同步训练 21.2.1】

A　组

1．填空题：

（1）$(a+b)^n=$____．这个公式所表示的规律叫做____________，右边的多项式叫做$(a+b)^n$ 的二项展开式，其形式具有以下特点：项数共有____项，指数 n 为偶数时，有奇数项，n 为奇数时，有偶数项， _____按降幂排列，_____按升幂排列， a 与 b 指数和为_________.

（2）通项公式 $T_{m+1}=$_________________，是二项展开式中的第______项.

（3）在$(2x+y)^{10}$ 的展开式中，含 x^7y^3 的项的系数是_______.

（4）$(2x^2+\frac{1}{x})^6$ 的展开式的常数项是________.

2．选择题：

（1）$(x+\sqrt{2})^{10}$ 的第 7 项的二项式系数为（　　）.

（A）210　　（B）120　　（C）960　　（D）840

（2）$(2x-3)^{10}$ 的第 4 项的系数为（　　）.

（A）120　　（B）414 720　　（C）-120　　（D）$-414\ 720$

（3）$(x-y)^n$ 的二项展开式中，第 m 项的二项式系数是(　　).

（A）C_n^m　　（B）C_n^{m+1}　　（C）C_n^{m-1}　　（D）$(-1)^{m-1}C_n^{m-1}$

（4）二项展开式$(a+b)^{2n}$ 的项数是(　　).

（A）$2n$　　（B）$2n+1$　　（C）$2n-1$　　（D）$2(n+1)$

3．求$(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^4$ 的二项展开式.

B　组

1．选择题：

（1） 二项式$(a+b)^n$ 的展开式的第 3 项与第 8 项的二项式系数相等，则二项展开式的中间项是(　　).

（A）第 5 项或第 6 项　　（B）第 6 项　　（C）第 6 项或第 7 项　　（D）第 5 项

（2）若$(a-\sqrt{3})^n$ 的展开式中，含 a^{n-2} 的项的系数等于 30，则 n 的值是（　　）.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

2．填空题：

（1）在$(a-2b)^n$ 的展开式中，第 5 项的系数与第 7 项的系数之比为 4∶1，则 $n=$________.

（2）$(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中常数项等于__________.

3．用二项式定理证明 89^9+87 能被 88 整除.

4．$(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式第二、三、四项的系数成等差数列，求 n 的值.

【知识链接】

1．求$(x+\dfrac{1}{x})^4$ 的二项展开式，并说明系数最大的项是第几项.

2．求 $C_6^1+C_6^3+C_6^5$和 $C_6^0+C_6^2+C_6^4+C_6^4$.

21.2.2　二项式系数的性质

【学习目标】

掌握二项式系数的性质及应用.

【学法指导】

理解并熟记二项式系数的性质是解决有关问题的基础，赋值法是解决二项展开式中系数问题的常用技巧.

例题赏析

例　$(1-2x)^n$ 的展开式中第 2 项与第 7 项二项式系数相等，求展开式中二项式系数最大的项和二项式系数的和以及展开式各项系数之和.

解：依题意 $C_n^1=C_n^6$，解得 $n=7$，所以展开式共有 8 项，

二项式系数最大的项为：$T_4=C_7^3(-2x)^3=-280x^3$，$T_5=C_7^4(-2x)=560x^4$；

二项式系数的和为 $C_7^1+C_7^2+C_7^3+\dots+C_7^7=128$.

令 $x=1$ 时，可得展开式各项系数之和为$(1-2\times1)^7=-1$.

点拨：用赋值法求系数之和是一种常用的方法，即赋予式子中的字母一个特殊值，从而使问题得到解决.

【同步训练 21.2.2】

A　组

1．填空题：

（1）在二项展开式中与首末两端“等距离”的两项的二项式系数__________；当有奇数项时，二项式系数最大值为_________的系数，当有偶数项时，中间两项的二项式系数相等，同时

最大.

（2）所有项的二项式系数和等于________；奇数项的二项式系数和等于偶数项的二项式系数和，且为________.

（3）$(1+x)^9$的展开式奇次项的系数之和为_______.

（4）$(\frac{x}{3}+\frac{3}{x})^n$ 的展开式中第 6 项的二项式系数最大，则 $n=$_______.

2．选择题：

（1）$(x+1)^{10}$的展开式的系数最大项是(　　).

（A）第 5 项　（B）第 6 项　（C）第 4 项或第 5 项　（D）第 5 项或第 6 项

（2）$(a-b)^7$的展开式中所有项的二项式系数和(　　).

（A）2^7　（B）2^6　（C）1　（D）0

（3）$(a+b)^{2n}$的展开式中，二项式系数最大的项是(　　).

（A）第 n 项　（B）第 $n+1$ 项　（C）第 $\frac{n+1}{2}$ 项　（D）第 $\frac{n}{2}+1$ 项

（4）$C_{10}^2+C_{10}^4+C_{10}^6+C_{10}^8+C_{10}^{10}=$ (　　).

（A）1 023　（B）511　（C）256　（D）512

3．$(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^n$的展开式系数之和为 64，求展开式中的常数项.

B　组

1．选择题：

（1）$(x^3+\frac{1}{x^2})^n$只有第 6 项系数最大，则展开式中的常数项是(　　).

（A）150　（B）210　（C）330　（D）120

（2）$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}$ 的值是(　　).

（A）2^n　（B）$2n-1$　（C）2^{n-1}　（D）$2(2^{n-1}-1)$

（3）在$(1+x)^n$的展开式中，若奇数项的系数之和为 256，则第 3 项是 (　　).

（A）$C_9^3x^3$　（B）$C_9^2x^2$　（C）$C_8^3x^3$　（D）$C_8^2x^2$

（4）若$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7$的值等于（　　）.

（A）-2　（B）-1　（C）0　（D）2

2．填空题：

（1）若$(a+b)^n$ 的展开式中的所有项的二项式系数和等于 128，则展开式的中间项是第_________项.

（2）在$(a-\frac{1}{a})^{2n}$ 的展开式中，如果第 4 项和第 6 项系数相等，则展开式中的常数项为__________.

（3）$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=$_______.

3．若$(5x+4)^{10}=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+a_0$，求 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}$的值.

【知识链接】

抛掷一枚质地均匀的骰子，考查朝上一面的点数.

（1）写出这一随机试验的样本空间.

（2）写出事件 A “朝上一面的点数大于 3”所包含的基本事件.

（3）求事件 A 的概率.

21.3　离散型随机变量及其分布

21.3.1　离散型随机变量

【学习目标】

1．了解随机变量及离散型随机变量的概念，会求离散型随机变量的分布列；了解超几何分布及小概率事件.

2．掌握分布列的两条性质；能运用超几何分布及小概率原理解决产品检验的相关问题.

【学法指导】

学习离散型随机变量，重点是弄清两个问题：（1）随机变量所有可能取的值；（2）随机变量取每个值的概率.

离散型随机变量分布列的两条性质通常用来验证写出的分布列是否正确.

在用小概率原理检验产品时，实质上是承认小概率事件在一次试验中不会发生，若小概率事件发生了，则认为产品不合格.

例题赏析

例 1　一个口袋中放有 6 个大小相同的球，其中，一个球的标号为 1，两个球的标号为 2，三个球的标号为 3，从中随机地取出一个球.

（1）试写出这个球的标号 ξ 的分布列.

（2）求这个球的标号 ξ 小于 3 的概率.

分析：由已知条件知，取出的球的标号 ξ 的可能取值为 1，2，3，且相应的概率为 $P(\xi=1)=\dfrac{1}{6}$，$P(\xi=2)=\dfrac{1}{3}$，$P(\xi=3)=\dfrac{1}{2}$. 把 ξ 的取值及相应概率列出即为 ξ 的分布列.

解：（1）这个球的标号 ξ 的分布列为.

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

（2）这个球的标号 ξ 小于 3 的概率 $P(\xi<3)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$.

点拨：要写出离散型随机变量 ξ 的分布列，首先要弄清 ξ 的一切可能的取值及取每一个值所代表的事件，再求出这些事件的概率.

例 2　一批产品共 100 件，按照国家规定，这批产品含次品数不超过 5 件才合格．在这批产品中任取 3 件，发现其中有 2 件次品，问这批产品是否合格？($a=0.05$)

分析：根据题意，取出的 3 件中含次品数ξ 的概率分布是超几何分布，并且这批产品是否合格，取决于事件“取出的 3 件中含有 2 件次品”是不是小概率事件.

解：假设这批产品中含 5 件次品，从中任取 3 件所含的次品数为ξ ，则ξ 的可能取值为 0，1，2，3. ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{C_{95}^{3}C_{5}^{0}}{C_{100}^{3}}$	$\frac{C_{95}^{2}C_{5}^{1}}{C_{100}^{3}}$	$\frac{C_{95}^{1}C_{5}^{2}}{C_{100}^{3}}$	$\frac{C_{95}^{0}C_{5}^{3}}{C_{100}^{3}}$

即

ξ	0	1	2	3
P	0.856	0.138	0.0059	00006

所以 $P(\xi\geqslant 2)\ =P(\xi=2)\ +P(\xi=3)\ \approx 0.006<0.05$，

由此知“任抽 3 件其中有 2 件次品”是小概率事件．根据小概率原理，可判定这批产品不合格.

【同步训练 21.3.1】

A　　组

1．选择题：

（1）设离散型随机变量ξ 的概率分布如下，则 a 的值为（　　）.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	a

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{1}{4}$　（D）$\frac{1}{6}$

（2）①某机场候机室中一天的乘客数量为ξ ，②某寻呼台一天内收到寻呼的次数为ξ ，③某水文站观察到一天中长江的水位ξ ，④某立交桥一天经过的车辆数为ξ ，则（　　)不是离散型随机变量.

（A）①中的ξ　　（B）②中的ξ

（C）③中的ξ　　（D）④中的ξ

2．下列每小题给出的随机变量ξ 是否服从超几何分布，如果服从超几何分布，在后面的括号内填上“√”，如果不服从超几何分布，在后面的括号内填上“×”.

（1）从含有 5 件次品的 100 件产品中，任取 10 件，其中所含次品数为ξ ．（　　）

（2）从含有 5 件次品的 100 件产品中，任取 1 件，其中所含次品数为ξ ．（　　）

（3）从含次品率 5％的一大批产品中，任取 10 件，其中所含次品数为ξ ．（　　）

（4）从含次品率 5％的 100 件产品中，任取 1 件，其中所含次品数为ξ ．（　　）

（5）从含有 5 件次品的 100 件产品中，有放回地抽取 10 次，每次抽取 1 件，抽到的次品数为ξ ．（　　）

3．填空题：

（1）从装有 5 个黑球、4 个白球的口袋中，任意取出 4 个球，其中黑球的个数ξ 的可能取

值为__________ .

（2）投掷 2 颗骰子，所得点数之和ξ 是一个随机变量，则 $P(\xi\leqslant 4)$ =_______ ；

（3）若某篮球运动员投篮命中的概率为 $P=0.7$，则这名运动员一次投篮时投中次数的概率分布为

ξ	0	1
P		

4．从口袋里标号分别为 1，2，3，4，5 的五个小球中任取一个球，（1）写出所取小球标号的概率分布列；（2）画出所取小球标号的概率分布图.

5．从一批含有 12 件正品、3 件次品的产品中，任意抽取 2 件，（1）求抽得次品的分布列；（2）根据所得到的分布列，求事件“至多含一件次品的概率”.

6．一批产品 50 件，厂方规定一批中含次品件数不超过 3 件为合格，先从中任取 5 件，发现 2 件次品，试问能否认为该批产品合格？$(a=0.05)$

B　　组

1．选择题：

（1）设随机变量的分布列为 $P(\xi=i)=a\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$，$i=1$，2，3，则 a 的值为（　　）.

（A）1　　（B）$\frac{9}{13}$　　（C）$\frac{11}{13}$　　（D）$\frac{27}{13}$

（2） 已知随机变量ξ 的分布列如下，则 $P(\xi>1)$的值为（　　）.

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）0　　（D）1

2．填空题：

（1）在包含 3 件次品的 10 件产品中任意取 2 件，其中次品的个数ξ 的可能取值为___ .

（2）已知随机变量ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{1}{2^{k}}$，$k=1$，2，3，4…，则 $P(3<\xi\leqslant 4)=$_________ .

3．一批产品 50 件，含次品率 0.1，先从中任取 4 件，试写出所含次品数ξ 的分布列.

4．某厂的一批产品共 300 件，经检验合格才能出口，按出口规定，这批产品最多只能有 2 件不合格，检验人员从中任取 4 件，发现有不合格品，试问能否认为这批产品符合出口规定.

5．某厂有一批产品 500 件，按规定次品率不超过 0.01 才算合格，如果从这批产品中任抽 3 件，发现这 3 件中含有次品，问这批产品是否合格？($a=0.05$)

【知识链接】

已知随机变量ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0.23	0.10	0.16	0.12	0.16	0.10	0.13

求：（1）$P(\xi=3)$；　　（2）$P(\xi>3)$；

（3）$P(\xi\geqslant 4)$；　　（4）$P(2.5\leqslant\xi\leqslant 5)$.

21.3.2　二项分布

【学习目标】

1．理解 n 次独立重复试验及二项分布模型，会判断一个具体问题是否服从二项分布.

2．能应用二项分布模型解决一些简单的实际问题.

【学法指导】

1．n 次独立重复试验必须具备的两个条件：①每一次试验只有两个可能的结果 A 及 $\overline{A}$；②每一次试验中事件 A 发生的概率都不变．这两个条件是判断给出的随机试验是不是 n 次独立重复试验的依据.

2．注意在应用公式 $P(\xi=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ 计算概率时不要丢掉二项式系数 C_n^k，实际上 $\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ 就是$(q+p)^n$的展开式的第 $k+1$ 项.

例题赏析

例　在人寿保险事业中，很重视某一年龄的投保人的死亡率，假如每个投保人能活到 65 岁的概率是 0.6，考察 3 个投保人，求活到 65 岁的分布列.

分析：设ξ 是 3 个投保人能活到 65 岁的可能取值，则ξ 的取值为 0，1，2，3，且ξ 的概率分布符合二项分布．每个投保人能活到 65 岁的概率是 0.6，应用公式 $P(\xi=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ 即可求得.

解：$P(\xi=0)=\mathrm{C}_3^0 0.6^0(1-0.6)^3=0.064$，

$P(\xi=1)=\mathrm{C}_3^1 0.6^1(1-0.6)^2=0.288$，

$P(\xi=2) = C_3^2 0.6^2(1-0.6)^1=0.432$，

$P(\xi=3) = C_3^3 0.6^3(1-0.6)^0=0.216$.

分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

易错易混问题剖析

在公式 $P(\xi=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ 中，n 是试验次数，p 是在一次试验中事件 A 发生的概率，k 是事件 A 在 n 次独立重复试验中发生的次数．$q=1-p$．运用这个公式时，弄清 n，k，p 的值是关键.

【同步训练 21.3.2】

A　组

1．甲与乙进行乒乓球单打比赛，甲获胜的概率是0.6，若甲与乙比赛3次，试填写下表：

甲获胜的次数	0	1	2	3
相应的概率				

2．某射手击中目标的概率为0.8，求他射击4次命中次数ξ 的分布列.

3．某产品的次品率为0.03，进行重复抽样检查，选取3个样品，求其中的次品数ξ 的分布列.

B　组

1．选择题：

（1） 将一枚硬币连续抛掷5次，则正面向上的次数$\xi=2$的概率为 (　　).

（A）0.3125　　（B）0.03125　　（C）0.16125　　（D）0.016125

（2）随机变量$\xi \sim B(3，0.6)$，则 $P(\xi=1)$的值为 (　　).

（A）0.192　　（B）0.288　　（C）0.648　　（D）0.254

2．某同学玩射击气球游戏，若每次射击击破气球的概率为 0.7，每次射击结果互不影响，现有气球3个，求击破气球的个数ξ 的分布列.

3．生产一种零件，规定这种产品的次品率不超过0.04，先从中任取4件，发现1件次品，能否认为这批产品符合规定.（概率小于0.05为小概率）

【知识链接】

抛掷5枚硬币，求得到反面向上的次数ξ的分布列.

ξ	0	1	2	3	4	5
P						

21.4　正 态 分 布

【学习目标】

1．掌握正态分布在实际生活中的意义和作用 .

2．能应用正态分布解决一些简单的实际问题.

【学法指导】

1．正态分布是由它的平均数 a 和标准差 σ 唯一决定的，常把它记为 N(a，σ ^{2}).

2．正态变量 $N(a，\sigma^2)$在区间$(a-\sigma，a+\sigma)$，$(a-2\sigma，a+2\sigma)$，$(a-3\sigma，a-3\sigma)$内，取值的概率分别是 68.3%，95.4%，99.7%.

例题赏析

例　已知某厂生产的某种型号卡车轮胎的使用寿命（达到报废的界限）服从正态分布 N(36203，4827^2)（单位：km）. 一汽车公司一次从此厂买了 500 只轮胎，利用正态分布推算使用寿命分别在：

（1）36203 − 2×4827~36203＋2×4827；

（2）36203 − 3×4827~36203＋3×48273

范围内的轮胎的平均个数.

分析：正态变量 N(a，σ^2)在区间$(a-\sigma，a+\sigma)$，$(a-2\sigma，a+2\sigma)$，$(a-3\sigma，a-3\sigma)$内，取值的概率分别是 68.3%，95.4%，99.7%.

解：（1）使用寿命在 36203 − 2×4827~36203＋2×4827 范围内的轮胎的平均个数为：

$$500\times95.4\%=477；$$

（2）使用寿命在 36203 − 3×4827~36203＋3×4827 范围内的轮胎的平均个数为：

$$500\times99.7\%=498.$$

易错易混问题剖析

不要混淆正态变量 $N(a，\sigma^2)$在每个区间$(a-\sigma，a+\sigma)$，$(a-2\sigma，a+2\sigma)$，$(a-3\sigma，a-3\sigma)$内所对应的概率.

【同步训练 21.4】

A　组

1．某糖厂用自动打包机打包，每包重量ξ 服从正态分布 $N(100，1.2^2)$（单位：kg）. 一公司从该糖厂进货 1500 包，是推算重量在下列范围内的平均个数：

（1）100 − 1.2~100＋1.2；

（2）100 − 3×1.2~100＋3×1.2

2．设部队战士的身高服从正态分布 $N(172，5^2)$ （单位：cm）. 现在军服厂要裁制 10 000 套军服供应某部战士换装，求适宜身高在 167~177cm 范围内战士穿的服装要裁制多少套？

3．某工厂生产滚珠，从长期经验知道，滚珠直径服从正态分布 $N(15，0.2^2)$（单位：mm）．现随机抽取 1 000 个，利用正态分布推算其直径分别在

（1）15 − 0.2~15 + 0.2；

（2）15 − 2×0.2~15 + 2×0.2

范围内的产品的个数．

B　组

已知某工厂生产的某种型号卡车轮胎的使用寿命（达到报废极限）服从正态分布 $N(36\ 203，4\ 827^2)$（单位：km）．一汽车公司一次从此厂买了 1 500 只轮胎，利用正态分布推算使用寿命分别在

（1）36 203 − 1×4 827~36 203 + 1×4 827；

（2）36 203 − 3×4 827~36 203 + 3×4 827

范围内的轮胎平均个数．

综合练习 21

一、选择题：

1．由数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中偶数共有（　　）个．

（A）60　（B）24　（C）36　（D）48

2．五个人站成一排，如果甲乙必须相邻且甲在乙的右边，那么不同的排法有（　　）．

（A）60 种　（B）48 种　（C）36 种　（D）24 种

3．从 0，1，2，3 这四个数中任取 2 个数，则这两个数的乘积是 0 的概率是（　　）．

（A）$\frac{1}{3}$　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{12}$

4．二项式$(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^n$的展开式的第 5 项为常数项，则 $n=$（　　）．

（A）10　（B）11　（C）12　（D）13

5．若$(3a+b)^n$的展开式的系数和等于$(x+y)^8$的展开式的系数和，则 $n=$（　　）．

（A）3　（B）4　（C）6　（D）8

6．若 $A_m^3=6C_m^4$，则 $m=$（　　）．

（A）6　（B）7　（C）8　（D）9

7．若二项式$(x+y)^n$的展开式的第 k 项与第 $k+1$ 项系数最大，则 $n=$（　　）．

（A）$2k-2$　（B）$2k+1$　（C）$2k-1$　（D）$2k$

8．某商业大楼有 8 个门，供顾客出入，某顾客从任一门进入，从另一门走出，不同的走法种数为（　　）．

（A）8　（B）16　（C）64　（D）56

9．设离散型随机变量ξ 的概率分布如下，则 a 的值为（　　）．

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{6}$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\frac{1}{6}$

10．把一枚硬币连续抛掷 3 次，恰有 2 次出现正面的概率是（　　）.

（A）$\frac{1}{8}$　　（B）$\frac{2}{8}$　　（C）$\frac{3}{8}$　　（D）$\frac{1}{2}$

11．某射手射击 1 次的命中率为 0.9，则 4 次设计中恰有 3 次命中的概率是（　　）.

（A）$C_4^3\times0.9^3\times0.1$　（B）$C_4^1\times0.9\times0.1^3$　　（C）0.9×0.1^3　　（D）$0.9^3\times0.1$

12．从 10 件产品（其中 8 件正品、2 件次品）中，有放回的每次抽取 1 件，连续抽 2 次，至少有 1 次抽到次品的概率是（　　）.

（A）0.32　　（B）0.96　　（C）0.36　　（D）0.8

二、填空题：

1．从 1，2，3，4，5 五个数字中任取一个，取出的一个恰是偶数的概率是__________.

2．某气象站天气预报的准确率为 80%，5 次预报中恰有 4 次准确的概率是__________.

3．某地区 7 月份的平均气温在各个范围内的概率如下：

平均气温	低于 15℃	15℃～20℃	15℃～20℃	15℃～20℃	不低于 30℃
概率	0.05	0.45	0.40	0.09	0.01

则在 7 月份，这个地区平均气温在 15℃～25℃范围内的概率为________________ .

4．$C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+\cdots+C_{10}^{10}=$________.

5．在包含 4 件产品的 10 件产品中任意取 3 件，其中次品的个数ξ 的可能取值为_______.

三、解答题：

1．7 人站成一排，其中有甲，乙两人：

（1）站成一排，有多少种站法？

（2）甲站在中间，有多少种站法？

（3）甲、乙两人必须站在两头，有多少种站法？

（4）甲、乙两人必须站在一起，有多少种站法？

（5）甲、乙两人不能相邻，有多少种站法？

2．求$(x-\frac{1}{x})^7$的二项展开式中 x^3 的系数.

3．10 件产品中有 4 件次品，从中任取 3 件，求：① 取得次品数ξ 的分布列；② 次品数ξ 不超过 1 的概率.

4．一批产品 50 件，规定次品数不超过 2 件为合格，现从中任取 3 件，发现一件次品，试问能否认为该批产品合格？如果发现 2 件次品呢？

参考答案与提示

第 12 章　三角计算及其应用

12.1　和 角 公 式

12.1.1　两角和与差的余弦

【同步训练 12.1.1】

A　组

1.（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（4）$\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

2.（1）D　（2）A

3.（1）解：因为 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$，α，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\cos\alpha=\frac{8}{17}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{8}{17}\times\frac{12}{13}-\frac{15}{17}\times\frac{5}{13}=\frac{21}{221}$，

因为 α，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{21}{221}>0$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{21}{221}$，$\alpha+\beta$ 的范围为 $(0,\frac{\pi}{2})$.

（2）解：因为 $13\cos\alpha+5\cos\beta=9$，$13\sin\alpha+5\sin\beta=15$，两边平方得：

$169\cos^2\alpha+130\cos\alpha\cos\beta+25\cos^2\beta=81$，　①

$169\sin^2\alpha+130\sin\alpha\sin\beta+25\sin^2\beta=225$，　②

①+②得 $169+25+130(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=306$，

所以 $130\cos(\alpha-\beta)=112$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{56}{65}$.

B　组

1.（1）$\cos x$；（2）$\cos\alpha$；（3）2π.

2.（1）A　（2）B　（3）D

3.（1）解：原式 $=\cos^2 72°-\cos 72°\cos 12°+\sin^2 72°-\sin 72°\sin 12°$

$$=1-\cos(72°-12°)=1-\cos 60°=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

（2）解：因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$，

由于 $\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$，所以 $\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

同理可求 $\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos[(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\frac{\alpha}{2}-\beta)]=\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)+\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)$

$$=(-\frac{1}{9})\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}.$$

（3）解：因为 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，α 为锐角，所以 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

又因为 α、β 都是锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=(-\frac{11}{14})\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\beta=\frac{1}{2}$，

又因为 β 为锐角，所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

【知识链接】

（1）$\sin\alpha$；　（2）$-\sin\alpha$；　（3）$\sin(\alpha+\beta)$；　（4）$-\sin(\alpha+\beta)$.

12.1.2　两角和与差的正弦

【同步训练 12.1.2】

A　组

1．（1）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）1；（3）$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2．（1）A　（2）D　（3）C　（4）B

3．（1）解：因为 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$，α，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{15}{17})^2}=\frac{8}{17}$，$\sin\beta=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\frac{5}{13}$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{15}{17}\times\frac{12}{13}+\frac{8}{17}\times\frac{5}{13}=\frac{220}{221}$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{15}{17}\times\frac{12}{13}-\frac{8}{17}\times\frac{5}{13}=\frac{140}{221}$.

（2）解：因为 $13\sin\alpha+5\cos\beta=9$，$13\cos\alpha+5\sin\beta=15$，
将两式两边分别平方得

$169\sin^2\alpha+130\sin\alpha\cos\beta+25\cos^2\beta=81$　　①

$169\cos^2\alpha+130\cos\alpha\sin\beta+25\sin^2\beta=225$　　②

①+②得 $169+25+130(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=306$，
所以 $130\sin(\alpha+\beta)=112$，即 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{56}{65}$.

B　组

1．（1）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$[-1,1]$；（3）$-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$，$\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

2．（1）A（2）C（3）D　（4）C

3.（1）解：因为点 $P(-3, 4)$在角 α 的终边上，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

又因为 $Q(-2, -1)$是角 β 的终边上点，所以 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{11\sqrt{5}}{25};\end{aligned}$$

（2）解：因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，且 $\alpha+\beta\in(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$；

因为 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，$\alpha-\beta\in(\frac{\pi}{2}, \pi)$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，

$$\begin{aligned}\sin2\alpha&=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]\\&=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}.\end{aligned}$$

【知识链接】

1．$\tan\alpha$.　　2．$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

12.1.3　两角和与差的正切

【同步训练 12.1.3】

A　组

1.（1）1；（2）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$；（3）$-\frac{11}{7}$，13.

2.（1）A　（2）D　（3）C

3.（1）证明：左边$=1+\tan B+\tan A+\tan A\tan B=\tan A+\tan B+\tan A\tan B+1$

$=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)+\tan A\tan B+1$，

因为 $A+B=45^\circ$，

所以左边 $=\tan45^\circ(1-\tan A\tan B)+\tan A\tan B+1$

$=1-\tan A\tan B+\tan A\tan B+1=2=$ 右边，

所以等式成立.

（2）解：① 原式$=\tan(53^\circ-23^\circ)=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

② 原式 $=\tan(2\theta+\theta)=\tan3\theta$；

③ 原式$=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)$.

B　　组

1.（1）2；（2）$\frac{1}{2k^2}$；（3）$\frac{1}{9}$，-9.

2.（1）C　（2）B　（3）D

3．解：（1）原式 $=\tan(40°+20°)(1-\tan40°\tan20°)+\sqrt{3}\tan40°\tan20°$

$=\tan60°(1-\tan40°\tan20°)+\sqrt{3}\tan40°\tan20°$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan40°\tan20°+\sqrt{3}\tan40°\tan20°$

$=\sqrt{3}$；

（2）解：$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\tan[(\alpha+\beta)-(\beta-\frac{\pi}{4})]=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{22}$.

（3）解：因为 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 是方程 $x^2+4x+3=0$ 的两根，

由根与系数的关系得

$$\tan\alpha+\tan\beta=-4，\tan\alpha\tan\beta=3，$$

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-4}{1-3}=2$.

【知识链接】

$2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

12.2　倍 角 公 式

【同步训练 12.2】

A　　组

1.（1）$\frac{1}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$\frac{2}{3}$，$\frac{\sqrt{5}}{3}$；（3）$\frac{\pi}{2}$；（4）2π；（5）π.

2.（1）A　（2）C　（3）B　（4）B

3.（1）解：因为 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，α 为锐角，所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $2\cos^2(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})-1=\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$

$=\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

（2）解：原式 $=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$，

因为 $0°<\alpha<45°$，所以 $\sin\alpha<\cos\alpha$，所以原式 $=\sin\alpha+\cos\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha=2\cos\alpha$.

（3）解：因为 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，且 $\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，

所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=-\frac{5}{13}$，

所以 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times(\frac{12}{13})^2-1=\frac{119}{169}$，

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times(-\frac{5}{13})\times\frac{12}{13}=-\frac{120}{169}$，

$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\dfrac{120}{119}$.

B　　组

1.（1）$\dfrac{5}{4}$;（2）$-\sqrt{3}$;（3）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.（1）解：因为 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{5}{9}$,

所以$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$,

所以 $\sin^2 2\theta=\dfrac{8}{9}$，因为 2θ 为第三象限，所以 $\sin 2\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（2）左边$=\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta-(1-2\sin^2\theta)}{1+2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1}=\dfrac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}=\tan\theta=$右边.

所以等式成立.

【知识链接】

1．略.

2．2，-2，2π.

12.3　正弦型函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像和性质

【同步训练 12.3】

A　　组

1.（1） 2，-2，π;（2） 2，-2，4π;（3） 3，-3，π;（4） 5，-5，2π.

2.（1） B　　（2） A　　（3）A　　（4） D

3.（1） 图略;（2） 图略.

B　　组

1．解：原函数为 $y=3\sin[2(x-\dfrac{\pi}{12})]$.

把函数 $y=\sin x$ 图像上所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，就可得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像；把函数 $y=\sin 2x$ 图像上各点的纵坐标变为原来的 3 倍(横坐标不变)，就可得到函数 $y=3\sin\dfrac{1}{2}x$ 图像；把函数 $y=3\sin\dfrac{1}{2}x$ 的图像，沿 x 轴向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位，就可得到函数 $y=3\sin[2(x-\dfrac{\pi}{12})]$的图像，也就是函数 $y=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的图像.

2.（1）$y_{\max}=2$，此时 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最大值的 x 的集合是 $\{x\mid x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$;

$y_{\min}=-2$，此时 $x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最小值的 x 的集合是 $\{x\mid x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$;

周期 $T=2\pi$.

（2）将原函数化为正弦型函数为 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

$y_{max}=2$，此时 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最大值的 x 的集合是 $\{x\mid x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

$y_{min}=-2$，此时 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最小值的 x 的集合是 $\{x\mid x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

周期 $T=\pi$.

（3）将原函数化为正弦型函数为 $y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

$y_{max}=\sqrt{2}$，此时 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最大值的 x 的集合是 $\{x\mid x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

$y_{min}=-\sqrt{2}$，此时 $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最小值的 x 的集合是 $\{x\mid x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

周期 $T=2\pi$.

【知识链接】

1.（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{21}$（3）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

2.（1）$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$（2）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$.

12.4　解 三 角 形

12.4.1　余弦定理

【同步训练 12.4.1】

A　组

1.（1）120°；（2）$3\sqrt{7}$，$\frac{2\sqrt{7}}{7}$；（3）钝角；（4）$\frac{\pi}{3}$；（5）6.

2.（1）D　（2）C　（3）A

3.（1）解：因为 $\angle DAB=60°$，所以 $\angle ABC=120°$，

因为 $AD=6$，所以 $BC=6$，

由余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$

$=49+36-2\times7\times6\cos120°=127$，

所以 $AC=\sqrt{127}$，

所以对角线 AC 的长为 $\sqrt{127}$.

（2）解：由余弦定理得：$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，化简得：$a=b$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

B　组

1.（1）$60°$；（2）$90°$.

2.（1）A　（2）C　（3）B

3.（1）解：因为$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，$(a+b)^2-c^2=3ab$，$a^2+b^2-c^2=ab$，

所以$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，即 $\cos C=\frac{1}{2}$，因为 C 为三角形内角，所以 $\angle C=60°$.

（2）解：设 AC 交 BD 于 O，

所以 $AO=\frac{1}{2}AC=8$，　$BO=\frac{1}{2}BD=10$，$\angle AOB=60°$，

由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 60°$

$$=64+100-2\times 8\times 10\times\frac{1}{2}=84,$$

所以 $AB=2\sqrt{21}$，

同理可得 $AD^2=AO^2+DO^2-2AO\cdot DO\cos 120°$

$$=64+100-2\times 8\times 10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=244,$$

所以 $AD=2\sqrt{61}$，因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以 $AB=DC=2\sqrt{21}$，$AD=BC=2\sqrt{61}$.

（3）解：因为 $\sin A\sin B=\cos A\cos B$，

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=0$$

所以 $\cos(A+B)=0$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $A+B=\pi-C$，

所以 $\cos(\pi-C)=0$，即 $\cos C=0$，

又因为 C 为$\triangle ABC$ 的内角，所以$\angle C=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$ 为直角三角形.

【知识链接】

$(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$；$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ar\sin\alpha$.

12.4.2　三角形的面积

【同步训练 12.4.2】

A　组

1.（1）$\frac{3\sqrt{7}}{2}$；（2）$12\sqrt{3}$；（3）$4+4\sqrt{3}$；（4）$16\sqrt{3}$；（5）0.

2.（1）C　（2）A　（3）B

3.（1）解：由三角形面积公式得：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times 6\sin C=15\sin C$，

当 $\sin C=1$，即 $C=\frac{\pi}{2}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，且最大面积是 15.

（2）解：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+27-9}{2\times 3\times 3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 A 为三角形内角，所以 $A=30°$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

B　组

1．解：由三角形面积公式得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin C=40\sqrt{3},$$

$$\frac{1}{2}\times 16\times 10\sin C=40\sqrt{3},$$

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 C 为△ABC 的内角，所以 $\cos C=\pm\frac{1}{2}$.

2．解：由三角形面积公式得：$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,

所以 $\frac{1}{2}\times 3c\sin B=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，所以 $c=3$，因为 $a=3$，所以 $a=c=3$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$,

所以△ABC 为等边三角形.

【知识链接】

（1）2;（2）$b\sin A$，$c\sin B$，$a\sin C$.

12.4.3　正弦定理

【同步训练 12.4.3】

A　组

1．（1）30°；（2）$2\sqrt{3}-2$；（3）$\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

2．（1）A　（2）B　（3）C　（4）B

3．（1）解：由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，所以 $AC=\frac{AB\sin B}{\sin C}=\frac{8\sin 30°}{\sin 45°}=4\sqrt{2}$.

（2）解：$\angle B=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

B　组

1．（1）A　（2）B　（3）D

2．解：$a=2b\cos C$，$a=2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$b^2=c^2$，$b=c$，即三角形 ABC 为等腰三角形.

12.5　三角计算及应用举例

【同步训练 12.5】

A　组

1．（1）$\sqrt{19}$，$\frac{15\sqrt{3}}{4}$；（2）1，-1，π.

2．（1）C　（2）D　（3）B　（4）A

3．$I=11\sin\omega t+\sqrt{3}\cos\omega t=2\sqrt{31}\sin(\omega t+\theta)$,

其中θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{11}{2\sqrt{31}}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{31}}$，查表或利用计算器求得$\theta\approx 8°57'$.

所以 $I=2\sqrt{31}\sin(\omega t+8°57')$.

B　组

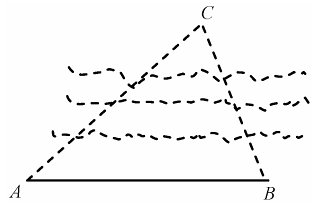
1．解：$\angle ABC=180°-51°-75°=54°$.

由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC},$$

所以 $AB=\dfrac{AC\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}$

$=\dfrac{50\sin 75°}{\sin 54°}\approx 59.7(\text{m})$



即 A，B 两点间的距离是 59.7 m.

2．解：(1) $f(x)=2\cos x\sin(x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$

$=2\cos x(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)+\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x-\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{2}-\cos 2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$=2(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{3})$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$,

所以 $y_{\max}=2$，$y_{\min}=-2$，周期 $T=\pi$.

（2）令 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最大值的 x 的集合是 $\{x\mid x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

令 $2x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最小值的 x 的集合是 $\{x\mid x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

综合练习 12

一、1. A　2. C　3. A　4. D　5. B　6. C　7. D　8. A　9. B　10. C

二、1. $\dfrac{1}{2}$；2. $-\dfrac{1}{2}$；3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；4. 2；5. $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$；6. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

7. $-\dfrac{4}{3}$；8. $-\dfrac{23}{40}$；9. $2\sqrt{3}$，2；10. $-\dfrac{15}{2}$；11. $\dfrac{1}{8}$.

三、1. 解：因为 $P(3,-4)$为角 α 终边上的点，

所以 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，

又因为 $Q(2,1)$为角 β 终边上的点，所以 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}-(-\dfrac{4}{5})\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=-\frac{4}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{11\sqrt{5}}{25}$,

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-(-\frac{4}{3})\times\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$.

2．解：因为 $f(x)=\sin2x+\cos2x+2=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+2$，

所以$f(x)_{\min}=2-\sqrt{2}$，此时 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即 $x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，y 有最小值，

所以使 y 取最小值时的 x 的集合为$\{x\,|\,x=k\pi-\frac{3\pi}{8},\ k\in\mathbf{Z}\}$.

3．解：因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\alpha-\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$，

因为 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\alpha+\beta\in(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$，

所以 $\sin2\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=(-\frac{3}{5})\times\frac{12}{13}+(-\frac{4}{5})\times\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}$.

4．解：由余弦定理得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4,\ b=2,$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}$

$=\frac{\sqrt{6}\sin45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $A=60^\circ$ 或 $A=120^\circ$．所以 $C=75^\circ$ 或 $C=15^\circ$，

当 $A=60^\circ$ 时，$C=75^\circ$；当 $A=120^\circ$ 时，$C=15^\circ$．

本题结果为 $A=60^\circ$，$C=75^\circ$，$b=2$ 或 $A=120^\circ$，$C=15^\circ$，$b=2$.

5．解：由三角形面积公式得 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，解得 $c=4$，

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=13$，所以 $a=\sqrt{13}$，

所以$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$.

6．解：$y=1-2\sin^2x-\sin^2x+3\sin x=-3\sin^2x+3\sin+1=-3(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$,

所以当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\min}=-5$，此时 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以使函数 y 取得最小值时的 x 的集合为$\{x\,|\,x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

7．解：在 Rt$\triangle BDC$ 中，$\angle DBC=60^\circ$，$BD=4$，所以 $\angle DCB=30^\circ$，

因为等腰$\triangle ABC$，所以 $\angle BAC=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，

又因为 $\angle DBC=60^\circ$，所以 $\angle DBA=30^\circ$，所以在 Rt$\triangle BDA$ 中，$AB=\frac{8\sqrt{3}}{3}$,

所以 $AB=AC=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，所以三角形的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin120^\circ=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

第 13 章　圆 锥 曲 线

13.1　椭　　圆

13.1.1　椭圆的标准方程

【同步训练 13.1.1】

A　组

1.（1）A　（2）D　（3）D　（4）C

2.（1）$(3, 0)$，$(-3, 0)$，6；（2）$(0, \sqrt{7})$，$(0, -\sqrt{7})$，$2\sqrt{7}$；（3）18.

3. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$.　　4. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{18}=1$.

B　组

1.（1）A　（2）D　（3）B　（4）B　（5）B　（6）C

2.（1）14；（2）$2\sqrt{13}$；（3）$(0, \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6})$；（4）$4+2\sqrt{3}$.

3. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{20}=1$.　　4. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　5.（1）$(0, 1)$，$(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3})$；（2）$\dfrac{4}{3}$.

【知识链接】

1. $(x, -y)$；$(-x, y)$；$(-x, -y)$.　　2. $(2, 0)$、$(-2, 0)$；$(0, 2)$、$(0, -2)$.

13.1.2　椭圆的几何性质

【同步训练 13.1.2】

A　组

1.（1）C　（2）C　（3）B　（4）B

2.

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
对称性	x、y，坐标原点	
焦点	$(c, 0)$、$(-c, 0)$	$(0, c)$、$(0, -c)$
顶点	$(a, 0)$、$(-a, 0)$ $(0, b)$、$(0, -b)$	$(b, 0)$、$(-b, 0)$ $(0, a)$、$(0, -a)$
a、b、c 关系	$a>b>0$，$a>c>0$，$a^2=b^2+c^2$	
离心率	扁，圆	

3．顶点坐标$(4, 0)$，$(-4, 0)$，$(0, 2)$，$(0, -2)$；长轴长 8；短轴长 4；离心率$\frac{\sqrt{3}}{2}$；及焦点坐标$(2\sqrt{3}, 0)$，$(-2\sqrt{3}, 0)$.

B　　组

1.（1）A　（2）C　（3）A　（4）B　（5）C　（6）B

2.（1）3 或 5；（2）一或四；（3）$\frac{1}{3}$；（4）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

3．$\frac{64\sqrt{3}}{3}$.

【知识链接】

1．$4<k<9$.

2．当$-\sqrt{17}<m<\sqrt{17}$时，直线与椭圆有两个交点；当 $m=\pm\sqrt{17}$时，直线与椭圆有一个交点；当 $m>\sqrt{17}$或$m<-\sqrt{17}$时，直线与椭圆无交点.

13.2　双　曲　线

13.2.1　双曲线的标准方程

【同步训练 13.2.1】

A　　组

1.（1）A　（2）C　（3）A　（4）C　　2．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

B　　组

1.（1）C　（2）D　（3）B　　2.（1）4；（2）$\sqrt{34}$.

3．解：设$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，

由方程组：$\begin{cases} x^2-\frac{y^2}{2}=1 \\ y=x+m \end{cases}$得：$x^2-2mx-m^2-2=0$，

因为$\Delta=4m^2+4(m^2+2)=8m^2+8>0$，

所以无论 x 为何值，直线与双曲线恒有两个交点.

所以$x_1+x_2=2m$；$x_1x_2=-m^2-2$，

因为$OA\perp OB$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+m)(x_2+m)=2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2$，

$=m^2-4$，所以 $m=\pm 2$.

4．解：设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，所以 $m-n=2a=4$，所以 $m^2+n^2-2mn=16$，又因为在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$m^2+n^2=|F_1F_2|^2=20$，所以 $mn=2$，所以$\triangle PF_1F_2$的面积是 1.

【知识链接】

1．第四象限.　　2．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

13.2.2　双曲线的几何性质

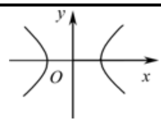
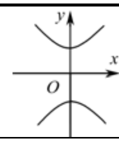
【同步训练 13.2.2】

A　　组

1．（1）A　（2）D　（3）A　（4）D

2．（1）$(\sqrt{7},0)$、$(-\sqrt{7},0)$；（2）$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$．

3．

图形		x 
对称性	x、y，坐标原点	
焦点	$(c,0)$、$(-c,0)$	$(0,c)$、$(0,-c)$
焦距	$2c$	$2c$
顶点	$(a,0)$、$(-a,0)$	$(0,a)$、$(0,-a)$
实轴长	$2a$	$2a$
虚轴长	$2b$	$2b$
渐近线方程	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
a、b、c 关系	$c>a>0$，$c>b>0$，$c^2=a^2+b^2$	
离心率	开阔	

4．解：双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$，所以 $a^2=4$，$b^2=5$，

所以 $c^2=a^2+b^2=9$，$c=3$，

所以实半轴长 $a=2$，虚半轴长 $b=\sqrt{5}$，焦点坐标$(3,0)$、$(-3,0)$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$，

渐近线方程 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，顶点坐标$(2,0)$，$(-2,0)$．

B　　组

1．（1）B　（2）D　（3）A　（4）B

2．（1）$\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{5}=1$；（2）第二或第三象限．

3．解：椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标是$(4,0)$和$(-4,0)$，所以双曲线中 $c=4$，

又因为双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{3}$，所以 $a=3$，所以 $b^2=c^2-a^2=16-9=7$，所以双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$．

4．解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为 A、B 在双曲线上，

所以 $9x_1^2-16y_1^2=144$　　①

$9x_2^2-16y_2^2=144$　　②

②−①得：

$$9(x_2^2-x_1^2)-16(y_2^2-y_1^2)=0,$$

所以 $9(x_2+x_1)(x_2-x_1)=16(y_2+y_1)(y_2-y_1)$，

又因为 $\frac{x_2+x_1}{2}=8$，$\frac{y_2+y_1}{2}=3$，

所以 $3(x_2-x_1)=2(y_2-y_1)$，

设弦 AB 所在的直线方程的斜率为 k，

所以 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3}{2}$，

所以弦 AB 所在的直线方程为：$3x-2y-18=0$．

【知识链接】

1．$\sqrt{2}$，$y=\pm x$，90°．　　2．向上，$(0, 0)$，$x=0$.

13.3　抛　物　线

13.3.1　抛物线的标准方程

【同步训练 13.3.1】

A　组

1．（1）C　（2）B　（3）A　　2．（1）$x^2=8y$；（2）$y^2=4x$；（3）14.

3．解：把抛物线方程 $y=\frac{1}{2}x^2$ 化为标准方程得：$x^2=2y$，

所以焦点坐标为 $(0, \frac{1}{2})$，

所以倾斜角为 60° 的直线方程为：$y=\sqrt{3}x+\frac{1}{2}$；

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

由方程组

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}x+\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

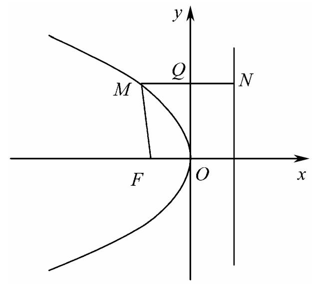
得：

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{3}+2 \\ y_1=2\sqrt{3}+\frac{7}{2} \end{cases},\quad \begin{cases} x_2=\sqrt{3}-2 \\ y_2=-2\sqrt{3}+\frac{7}{2} \end{cases}$$

所以 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-4\sqrt{3})^2}=8$.

B　组

1．（1）A　（2）C　（3）D　（4）C　　2．（1）4；（2）−7；（3）$y^2=-2x$.



3．解：如右图所示，作 MN 垂直准线 l，交 y 轴于 Q，因为抛物线的准线方程为 $x=4$，

所以 $QN=4$，

又因为 $MF=MN$，所以 $MQ=4$，

所以 M 点的横坐标是-4，

所以 $y^2=-16\times(-4)$，

解得：$y=8$ 或 $y=-8$；

所以 $M(-4, 8)$或$(-4, -8)$.

【知识链接】

1．$y^2=4x$ 或 $x^2=\frac{1}{2}y$．　　2．$y^2=12x$.　　3．$x^2=-16y$.

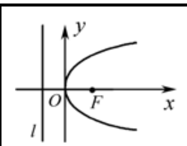
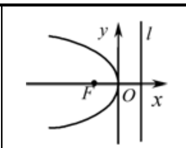
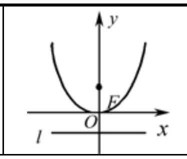
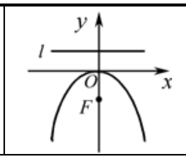
13.3.2　抛物线的几何性质

【同步训练 13.3.2】

A　　组

1.（1）A　（2）A　（3）C

2.

图形				
顶点	$(0, 0)$			
对称轴	x 轴		y 轴	
焦点	$(\frac{p}{2}, 0)$	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$(0, \frac{p}{2})$	$(0, -\frac{p}{2})$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
离心率	$e=1$			

3.（1）5；（2）$x^2=-2y$.

4．解：抛物线的焦点坐标为$(1, 0)$，

所以直线 l 的方程为 $y=2(x-1)$，

即：$2x-y-2=0$；

由方程组$\begin{cases}2x-y-2=0\\ y^2=4x\end{cases}$

得：$x^2-3x+1=0$，

所以 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=1$，

所以$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=5$．

B　　组

1.（1）B　（2）B　（3）C　（4）C

2.（1）$y^2=-8x$；（2）$y^2=16x$ 或 $y^2=-16x$；（3）3.

3．解：（1）因为圆心坐标为$(2, 0)$，半径$r=2$，所以抛物线的焦点$F(2, 0)$，所以$p=4$，所以$y^2=8x$；

（2）直线AB的方程为$y=2x-4$，由方程组$\begin{cases} y^2=8x \\ y=2x-4 \end{cases}$，消去$y$得：$x^2-6x+4=0$，

设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，所以$x_1+x_2=6$，$x_1x_2=4$，由抛物线的定义知：

$|AB|=x_1+x_2+p=6+4=10$，又因为$|CD|=2r=4$，

所以$|AC|+|DB|=|AB|-|CD|=10-4=6$.

4．解：（1）直线l的方程为：$x-y-1=0$；（2）所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$.

综合练习 13

一、1．D　2．B　3．D　4．A　5．C　6．B　7．A　8．D　9．C　10．C　11．D　12．C

二、1．$(1, 0)$；2．-1；3．$(0，\sqrt{3})$，$(0，-\sqrt{3})$.

三、1．解：把方程化为标准方程$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，

由此可知，实轴长$2a=6$，虚轴长$2b=8$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，

焦点坐标是$(-5, 0)$，$(5, 0)$，顶点坐标为$(3, 0)$，$(-3, 0)$，

离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$，渐近线方程为：$y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

2．解：由已知$a^2=1$，$c=\sqrt{1-b^2}$，抛物线方程为$y^2=4cx$，

由方程组$\begin{cases} y^2=4cx \\ x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$得：$b^2x^2+4cx-b^2=0$

又因为$e=\dfrac{c}{a}=c$，$b^2=1-c^2=1-e^2$，

所以$(1-e^2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\cdot 4e-(1-e^2)=0$，

所以$3e^2+8e-3=0$，

所以$e=\dfrac{1}{3}$或$e=-3$，

因为$e>0$，所以$e=\dfrac{1}{3}$.

3．解：设与直线$x+y-3=0$平行且与抛物线相切的直线m为：$x+y+b=0$，

所以有$\begin{cases} y^2=4x \\ x+y+b=0 \end{cases}$

消去x得：$y^2+4y+4b=0$，

当$\Delta=16-16b=0$时，$b=1$，

所以m的方程为$x+y+1=0$

所以由$\begin{cases} y^2=4x \\ x+y+1=0 \end{cases}$

得$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

所以点$C(1，-2)$到直线AB的距离最大，此时$\triangle ABC$面积最大.

第 14 章　坐标变换与参数方程

14.1　坐标轴平移

14.1.1　坐标轴的平移

【同步训练 14.1.1】

A　组

1.（1）B　（2）B　（3）A

2.（1）$(-5,2)$；　（2）$y'=2x'+6$.

3．$O(-1,2)$，$A(0,0)$，$B(4,4)$，$C(2,0)$.

4．(1) $x'=0$；(2) $y'=0$；(3) $2x'+3y'=0$.

B　组

1.（1）B　（2）B　（3）B　（4）D　（5）B

2．$A(2,2)$，$B(-6,1)$

3．$x'^2+y'^2=16$，图略.

【知识链接】

1.（1）$(y+4)^2$；　（2）$(x+2y)^2$；　（3）$(x-9)^2$；　（4）$-(3x-1)^2$.

2.（1）9，3；　（2）36，6；　（3）$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$；　（4）50，5.

14.1.2　利用坐标轴的平移化简二元二次方程

【同步训练 14.1.2】

A　组

1.（1）D　（2）B

2.（1）新坐标系原点的坐标为（-5，2）；

（2）新坐标系原点的坐标为（2，4）；

3．解：（1）方程化为$(x-3)^2+(y+6)^2=49$，表示以$(3,-6)$为圆心，7 为半径的圆.

平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,-6)$，则方程化简为 $x'^2+y'^2=49$.

（2）$y-2=\frac{1}{2}(x+1)^2$．表示以$(-1,2)$为顶点的抛物线，平移坐标轴，把原点移到 $O'(-1,2)$，则方程化简为 $y'=\frac{1}{2}x'^2$.

（3）$\frac{(x+4)^2}{100}-\frac{(y+7)^2}{100}=1$，表示以$(-4,-7)$为中心的等轴双曲线，平移坐标轴，把原点移到 $O'(-4,-7)$，则方程化简为$\frac{x'^2}{100}-\frac{y'^2}{100}=1$.

（4）方程简化为$(x-2)^2+(y+4)^2=25$，表示以(2，−4)为圆心，5 为半径的圆．平移坐标轴，把原点移到$O'(2,-4)$，则方程简化为$x'^2+y'^2=25$.

B　组

1．（1）B　（2）A　（3）B

2．（1）$\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{64}=1$；

（2）$\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$；

（3）$(x-3)^2=-8(y+3)$.

【知识链接】

$\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\frac{1}{2}$；$\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\frac{1}{2}$；$\frac{\sqrt{3}}{2}$；0；1.

14.1.3　坐标轴的旋转

【同步训练 14.1.3】

A　组

1．（1）A　（2）B　（3）B

2．（1）(0，1)；　（2）$\frac{\pi}{4}$；　（3）$x'+y'=0$.

3．（1）$(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$；　（2）$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7\sqrt{2}}{2})$；　（3）$5x'^2-y'^2=2$.

4．（1）$(\sqrt{3}-1,-1-\sqrt{3})$.　（2）$(\sqrt{3}+1)x'+(\sqrt{3}-1)y'=0$.

B　组

1．$\theta=\frac{\pi}{2}$

2．（1）$(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{1-3\sqrt{3}}{2})$；　（2）$(\frac{-1+2\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2})$.

3．（1）$3x'^2-y'^2=16$；（2）$y'^2=4x'$；（3）$x'^2=4y'^2=4$.

【知识链接】

1．$\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$2\cos^2\theta-1$，$1-2\sin^2\theta$

2．$\cot2\theta=-\frac{3}{4}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

*14.1.4　利用坐标轴的旋转化简二元二次方程

【同步训练 14.1.4】

A　组

1．$x'^2-y'^2=2$.

2．$\frac{\pi}{6}$.

3.（1）$\frac{\pi}{4}$；（2）$x'^2-4y'+4=0$.

B　组

1.（1）$\frac{\pi}{4}$；（2）$(2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$.

2.（1）$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$；（2）$a=9$，$c=4$，$f=36$.

【知识链接】

$\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$.

*14.2　一般二元二次方程的讨论

*14.2.1　化一般二元二次方程为标准式

【同步训练 14.2.1】

A　组

$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$，$4\sqrt{5}$，$-2\sqrt{5}$，7

B　组

（1）$\frac{7}{24}$，$\frac{7}{25}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$.

（2）$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=1$，椭圆.

（3）$\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$，$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$.

【知识链接】

$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

*14.2.2　一般二元二次方程的讨论

【同步训练 14.2.2】

A　组

1.（1）两平行直线；（2）没有图形；（3）两相交直线.

2.（1）两平行直线；（2）一直线；（3）无图形.

3.（1）开口向左的抛物线；（2）两平行直线；（3）一点；（4）两相交直线.

B　组

1.（1）0；（2）$0<k<4$ 但 $k\neq 2$；（3）$k>4$ 或 $k<0$.

2.（1）$a=2$，$b=-3$；（2）$h=1$，$k=4$；（3）两平行线.

【知识链接】

1. $(\cos\theta, \sin\theta)$.

2. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

3. $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

14.3　参 数 方 程

14.3.1　曲线的参数方程

【同步训练 14.3.1】

A　组

1.（1）A　（2）C　（3）C

2.（1）$\begin{cases} x=t^2-3t+1, \\ y=t-1, \end{cases}$　（2）$(0, \pm\sqrt{13})$；　（3）$(2, -1)$.

3. $\begin{cases} x=1+5t, \\ y=2+3t. \end{cases}$ (时间 t 为参数)

4.（1）$x^2+y^2=4$；圆　（2）$y^2=2x$；抛物线

（3）$2x-y-7=0$；直线　（4）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；椭圆

B　组

1.（1）B　（2）B　（3）A

2. 点 A 在方程的曲线上，而点 B 不在方程的曲线上.

3. $\begin{cases} x=-4t^2 & (1) \\ y=t+1 & (2) \end{cases}$　由(2)解出 t，得 $t=y-1$，代入(1)中，得 $x=-4(y-1)^2$　$(y\geqslant 1)$

即$(y-1)^2=-\frac{1}{4}x$ $(y\geqslant 1)$方程的曲线是顶点为(0，1)，对称轴平行于直线 $y=1$，开口向左的抛物线在对称轴上方的部分.

【知识链接】

1. 2828m.　2. $x^2+y^2=r^2$，$(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$.

14.3.2　圆的参数方程

【同步训练 14.3.2】

A　组

1.（1）B　（2）D　（3）D

2.（1）$(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$，$\frac{\pi}{3}$；　（2）相交但直线不过圆心；　（3）$\frac{10\pi}{3}$.

3.（1）$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta,\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=1+3\sin\theta,\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x=2+\sqrt{5}\cos\theta,\\ y=-1+\sqrt{5}\sin\theta,\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x=-3+\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta.\end{cases}$

4. 设点 P 的坐标为(x, y)，则圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点 M 坐标为$(5\cos\theta, 5\sin\theta)$，由题意知点 N 的坐标为$(0, 5\sin\theta)$，由中点公式得

$$\begin{cases}x=\frac{5}{2}\cos\theta,\\ y=5\sin\theta.\end{cases}$$

B　组

1.（1）B　（2）D　（3）B　（4）C　（5）B

2.（1）$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

（2）（0，2），$2\sqrt{2}$.

【知识链接】

相交.

14.3.3　直线的参数方程

【同步训练 14.3.3】

A　组

1.（1）C　（2）D　（3）C

2.（1）$4\sqrt{10}$ ；　（2）$\frac{5}{2}$;　（3）（−3，4），（−1，2）.

3. $\sqrt{14}$.

4. （1）$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\ y=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t.\end{cases}$（$t$ 为参数）;

（2）将直线 l 的参数方程中的 x，y 代入 $x-y-2\sqrt{3}=0$，得 $t=-(10+6\sqrt{3})$. 所以直线 l 和直线 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点到点 M_0 的距离为$|t|=10+6\sqrt{3}$.

B　组

1. 解： l_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t,\end{cases}$ （t 为参数）

t 是直线 l_1 上定点 M_0（1，0）到 t 对应的点 $M(x, y)$的有向线段 $\overline{M_0M}$ 的数量.

由$\begin{cases}x-1=-\frac{\sqrt{3}}{2}t & (1),\\ y=\frac{1}{2}t\ (2),\end{cases}$

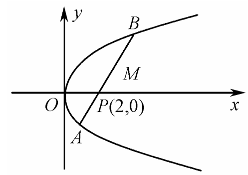
(1) (2)两式平方相加，得$(x-1)^2+y^2=t^2$,

$$|t|=\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

$|t|$ 是定点 M_0（1，0）到 t 对应的点 $M(x,y)$的有向线段 $\overline{M_0M}$ 的长.

2．此直线的倾斜角为 110°.

3．解：(1)因为直线 l 过点 P（2，0），斜率为$\frac{4}{3}$，



设直线的倾斜角为 α，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

则 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

所以直线 l 的标准参数方程为$\begin{cases} x=2+\frac{3}{5}t, \\ y=\frac{4}{5}t, \end{cases}$ （t 为参数）

因为直线 l 和抛物线相交，将直线的参数方程代入抛物线方程 $y^2=2x$ 中，

整理得 $8t^2-15t-50=0$.

$\Delta=15^2+4\times8\times50>0$，

设这个二次方程的两个根为 t_1、t_2，

由韦达定理得 $t_1+t_2=\frac{15}{8}$，$t_1t_2=-\frac{25}{4}$，

由 M 为线段 AB 的中点，

根据 t 的几何意义，得$|PM|=\left|\frac{t_1+t_2}{2}\right|=\frac{15}{16}$.

（2）因为中点 M 所对应的参数为 $t_M=\frac{15}{16}$，将此值代入直线的标准参数方程，

M 点的坐标为$\begin{cases} x=2+\frac{3}{5}\times\frac{15}{16}=\frac{41}{16} \\ y=\frac{4}{5}\times\frac{15}{16}=\frac{3}{4} \end{cases}$，即 M（$\frac{41}{16}$，$\frac{3}{4}$）.

（3） $|AB|=|t_2-t_1|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{5}{8}\sqrt{73}$.

4．（1）$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=1+\frac{1}{2}t \end{cases}$.

（2）$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4},\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$，2.

【知识链接】

略

14.3.4 圆锥曲线的参数方程

【同步训练 14.3.4】

A 组

1．（1）D （2）B （3）C （4）B

2．（1）$\frac{\sqrt{7}}{4}$； （2）$F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$； （3）$\sqrt{2}$.

B　组

1.（1）$\sqrt{5}-1$；　（2）$-4\sqrt{3}$；　（3）$4\sqrt{2}$，$(-3,\ -1)$．

2．解：原方程可化为$(y-3\sin t)^2=2(x-3\sqrt{3}\cos t-\frac{1}{2})$，这是顶点为$(3\sqrt{3}\cos t+\frac{1}{2},\ 3\sin t)$、对称轴平行于 x 轴的抛物线．由$\begin{cases}x=3\sqrt{3}\cos t+\frac{1}{2},\\ y=3\sin t,\end{cases}$消去参数 t，得椭圆方程$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{27}+\frac{y^2}{9}=1$，

所以题设方程是顶点在上述椭圆上的抛物线．

【知识链接】

略

14.4　参数方程的应用举例

【同步训练 14.4】

A　组

1．（1）D　（2）D　（3）D

2.（1）解：由题意知，直线 PQ 的方程是$\begin{cases}x=1-3t,\\ y=2+4t\end{cases}$，其中时间 t 是参数，

将 $t=3\text{s}$ 代入得 Q（−8，12）．

（2）$-1+3\sqrt{2}$,$-1-3\sqrt{2}$ ．

B　组

解：设椭圆的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$，

设椭圆上的点的坐标为$(2\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$，则该点到直线 $x-2y-8=0$ 的距离为

$$d=\frac{|2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}|\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-4|$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{5}|\cos(\theta+\frac{\pi}{3})-2|.$$

所以当 $\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=1$ 时，即$\theta=-\frac{\pi}{3}$时，距离取最小值为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，此时所求的点的坐标为（1，$-\frac{3}{2}$）．

综合练习 14

一、1．B　2．B　3．B　4．D　5．C　6．B　7．D　8．C

二、1．　$-\frac{5}{4}$ ；　2．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$（$x\geqslant2$）；　3．$\frac{5}{2}$；　4．$\sqrt{14}$ ．

三、解：将$\begin{cases}x=1+t,\\ y=-5+\sqrt{3}t,\end{cases}$代入得 $t=2\sqrt{3}$，

得 $P(1+2\sqrt{3},1)$，而 $Q(1,-5)$，得$|PQ|=4\sqrt{3}$.

四、解：设椭圆的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\theta,\\ y=2\sqrt{3}\sin\theta,\end{cases}$，

设椭圆上的点的坐标为$(4\cos\theta,\ 2\sqrt{3}\sin\theta)$，则该点到直线$x-2y-12=0$的距离为

$$d=\frac{|4\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta-12|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{5}|\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-3|$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{5}|2\cos(\theta+\frac{\pi}{3})-3|$$

当$\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=1$，$\theta=-\frac{\pi}{3}$时，$d_{\min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，此时所求点为$(2,-3)$.

五、解：（1）设圆的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta,\end{cases}$，

$2=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+1$，

所以$-\sqrt{5}+1\leqslant 2x+y\leqslant\sqrt{5}+1$；

（2）$x+y+a=\cos\theta+\sin\theta+1+a\geqslant 0$，

所以 $a\geqslant-(\cos\theta+\sin\theta)-1=-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1$，所以 $a\geqslant-\sqrt{2}-1$.

六、$(\frac{8\sqrt{5}}{5},\ \frac{4\sqrt{15}}{5})$.

第 15 章　逻辑代数基础

15.1　常用逻辑用语

15.1.1　命题

【同步训练 15.1.1】

A　组

1.（1）不是；（2）是；（3）是；（4）不是；（5）不是；（6）是.

2.（1）是；（2）不是；（3）不是；（4）是；（5）是；（6）是.

B　组

1.（1）是；（2）是；（3）不是；（4）是；（5）是；（6）不是.

2.（1）真；（2）假；（3）真；（4）真；（5）真；（6）假.

【知识链接】

1.（1）任意给一个等腰三角形，它的两底角相等；

（2）任意给一个平行四边形，它的对角线互相平分；

（3）任意给一个长方形，它的对角线相等；

（4）任意给一个含有x^2的函数，它都是二次函数.

2.（1）存在一个梯形，它的两底角相等；（2）存在一个平行四边形，它的对角线相等；

（3）存在有理数x，使得$x-1=0$成立.（4）存在有理数x，使得x^2+3是整数.

15.1.2 量词

【同步训练 15.1.2】

A 组

1.（1）B；（2）B；（3）D.

2.（1）充分；（2）$\exists$；（3）$\forall$.

B 组

1.（1）C；（2）A；（3）A.

2.（1）真；（2）假；（3）假.

【知识链接】

1. $\{-1\}$； 2. {整数}； 3. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

15.1.3 逻辑联结词

【同步训练 15.1.3】

A 组

1.（1）A；（2）B；（3）D；（4）D；（5）D.

2.（1）ΔABC 中，若$\angle C\neq 90°$，那么 $c^2\neq a^2+b^2$；

（2）任给实数 m，方程 $x^2+x-m=0$ 都有实根；

（3）真；

（4）a，b，c 至少有一个不为零；

（5）$abc\neq 0$；

（6）真.

【知识链接】

略.

B 组

1.（1）D；（2）D.

2.（1）$p\wedge q$：6=1 且 2=2；假

$p\vee q$：6=1 或 2=2．真

（2）$p\wedge$q：3>5 且 3=5；假

$p\vee q$：3>5 或 3=5．假

15.2 数 制

15.2.1 十进制与二进制

【同步训练 15.2.1】

A 组

1.（1）$2\times 10^1+7\times 10^0$；（2）$6\times 10^2+3\times 10^1+8\times 10^0$；

（3）$8\times 10^2+6\times 10^1+3\times 10^0+9\times 10^{-1}+1\times 10^{-2}$；

（4）$1\times10^3+9\times10^2+6\times10^1+3\times10^0+2\times10^{-2}+3\times10^{-3}$；

（5）$1\times10^4+8\times10^3+5\times10^1+6\times10^0+5\times10^{-1}$；

（6）$1\times10^4+6\times10^2+7\times10^1+3\times10^{-1}+1\times10^{-3}$.

2.（1）$1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$；　（2）$1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1$；

（3）$1\times2^2+1\times2^0+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}$；　（4）$1\times2^3+1\times2^0+1\times2^{-2}$；

（5）$1\times2^3+1\times2^1+1\times2^{-1}+1\times2^{-3}$；　（6）$1\times2^4+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-3}$.

B　组

1．略.

2．略.

【知识链接】

1．不是

2．略

15.2.2　二进制与十进制之间的转换

【同步训练 15.2.2】

A　组

1.（1）203；（2）42.625；（3）0.1875.

2.（1）10010001；（2）11011.0101；（3）0.111001011.

3.（1）11010；　（2）101101；　（3）1001010；

（4）10000001；　（5）101100100；　（6）11111110.01.

B　组

1.（1）13；　（2）21；　（3）53；　（4）117；　（5）166；　（6）255.

2.（1）10011010；　（2）43.

3．把下列十进制数转换成二进制数（保留四位小数）：

（1）1111111；　（2）11111010100.0010；　（3）110100.1010；　（4）1000100.0101 .

【知识链接】

1．$\{x\,|\,x\geqslant1\}$，$\{y\,|\,y\geqslant0\}$.

2．$\{0，1\}$.

15.3　逻 辑 代 数

15.3.1　基本概念与基本逻辑运算

【同步训练 15.3.1】

A　组

1.（1）布尔，与，或，非　（2）$A\cdot B$，$A+B$，$\overline{A}$.

2.（1）

A	B	$\overline{B}$	$A\cdot\overline{B}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

（2）

A	B	C	$B+C$	$A\cdot(B+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

B　组

1．0，1，00，01，10，11，8，2^n.

2．（1）$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$；

A	B	C	$A\cdot(B+C)$	$A\cdot B+A\cdot C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

（2）$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$.

A	B	C	$A+B\cdot C$	$(A+B)\cdot(A+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

【知识链接】

A，A，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$A$.

15.3.2 逻辑代数的运算律和基本定理

【同步训练 15.3.2】

A 组

1.

序号	运算律	公式	
1	0−1 律	$0\cdot A=0$	$1+A=1$
2	自等律	$1\cdot A=A$	$0+A=A$
3	重叠律	$A\cdot A=A$	$A+A=A$
4	互补律	$A\cdot\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
5	交换律	$A\cdot B=B\cdot A$	$A+B=B+A$
6	结合律	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
7	分配律	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$
8	反演律	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
9	还原律	$0\cdot A=0$	$1+A=1$

2．(1) C (2) D (3) D (4) B

3．(1) B (2) $\overline{A}$ (3) 1 (4) $ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

B 组

1．A A $A+B$ $AB+\overline{A}C$

2．(1) C (2) C (3) B (4) A (5) C

3．(1) 1 (2) 1 (3) $A+B$ (4) $\overline{A}\overline{B}$

【知识链接】

1．0，0． 2． 0，0．

15.3.3 逻辑函数

【同步训练 15.3.3】

A 组

1.

A	B	C	最小项	代号
0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0
0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4
1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
1	1	1	ABC	m_7

2．(1)　0，1　　　(2) 1，0，1

B　　组

1．(1) 1　　　(2) 1

2．二变量 A，B 的逻辑函数最小项：$\overline{A}\overline{B}$，$\overline{A}B$，$A\overline{B}$，AB.

m_3 的逻辑相邻项是 m_1，m_2.

3．四变量 A，B，C，D 的逻辑函数最小项：

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$，$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$，$\overline{A}\overline{B}CD$，$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$，$\overline{A}B\overline{C}D$，$\overline{A}BC\overline{D}$，$\overline{A}BCD$，

$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$，$A\overline{B}\overline{C}D$，$A\overline{B}C\overline{D}$，$A\overline{B}CD$，$AB\overline{C}\overline{D}$，$AB\overline{C}D$，$ABC\overline{D}$，$ABCD$

m_3 的逻辑相邻项是 m_1，m_2，m_7，m_{11}.

【知识链接】

略.

15.3.4　逻辑函数表示方法

【同步训练 15.3.4】

A　　组

1．

逻辑关系	表达式	逻辑关系	表达式
与	$Y=AB$	与非	$Y=\overline{A\cdot B}$
或	$Y=A+B$	或非	$Y=\overline{A+B}$
非	$Y=\overline{A}$	与或非	$Y=\overline{A\cdot B+C\cdot D}$
与或	$Y=AB+CD$	异或	$Y=\overline{A}B+A\overline{B}$
或与	$Y=(A+B)\cdot(C+D)$	同或	$Y=AB+\overline{A}\overline{B}$

2．（1）A　　（2）D　　　（3）A

3．

A	B	$\overline{A}+A\overline{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4．$Y=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}$

5．(1)

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

(2)

AB	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

6.

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1				1

B　组

1. （1）

A\B	0	1
0		1
1		1

（2）

A\BC	00	01	11	10
0			1	
1		1		1

（3）

A\B	0	1
0	1	1
1		1

（4）

A\BC	00	01	11	10
0		1	1	
1		1		1

2. 画出下列逻辑函数的卡诺图.

（1）

A\BC	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1	1	1

（2）

A\B	0	1
0		1
1		1

（3）

A\BC	00	01	11	10
0			1	1
1			1	1

（4）

AB\CD	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

【知识链接】

$F(A, B, C) = m_2 + m_6 + m_7$.

15.3.5　逻辑函数的化简

【同步训练 15.3.5】

A　组

1. （1）A　　（2）A　　（3）A+B　　（4）A

2. (1) D　　(2) A

3. （1）$Y=1$;　　　（2）$Y=A\bar{B}+C+D$.

4. （1）　　　　　　　　　　　　　（2）

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

由卡诺图可知，$Y=\overline{B}+CD$.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10				

由卡诺图可知，$Y=AB$.

B　组

1. (1) B　(2) D

2.（1）

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11	1	1	1	1
10			1	

由卡诺图可知，$Y=AB+\overline{A}\overline{B}+CD$.

（2）

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1	1	1

由卡诺图可知，$Y=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C$.

（3）

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	1
11		1	1	1
10	1	1	1	1

由卡诺图可知，$Y=\overline{B}+C+D$.

（4）

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		1

由卡诺图可知，$Y=\overline{A}\overline{C}+\overline{A}\overline{D}$.

（5）

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1	1	
10		1	1	

由卡诺图可知，$Y=D$.

【知识链接】

（1）$Y=AB+AC$；

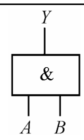
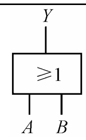
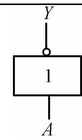
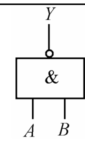
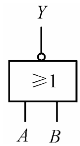
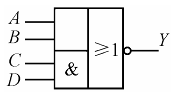
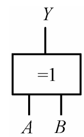
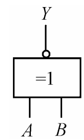
（2）$Y=B+CD$.

15.3.6　逻辑图

【同步训练 15.3.6】

A　组

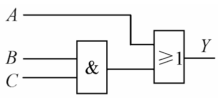
1. 常用逻辑元件图形符号与逻辑运算符号

运算	与	或	非	与非
表达式	$Y=AB$	$Y=A+B$	$Y=\overline{A}$	$Y=\overline{A\cdot B}$
图形符号				
运算	或非	与或非	异或	同或
表达式	$Y=\overline{A+B}$	$Y=\overline{A\cdot B+CD}$	$Y=\overline{A}B+A\overline{B}$	$Y=AB+\overline{A}\overline{B}$
图形符号				

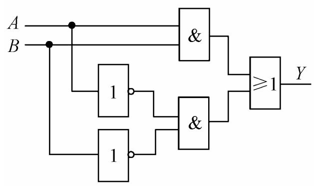
2. (1) $Y=A\overline{B}+B=A+B$;

(2) $Y=AC+B\overline{C}+\overline{A}BC=B\overline{C}+(A+\overline{A}B)C=B\overline{C}+AC+BC=AC+B$.

3. (1)



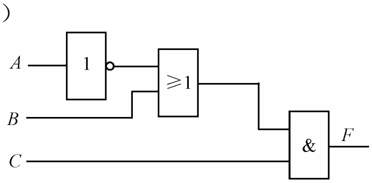
(2)



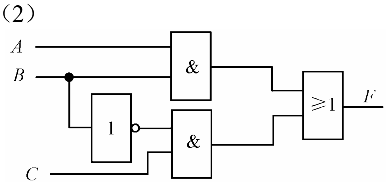
B　组

1.（1）$Y=AB+BC+AC$　　（2）$Y=ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

2.（1）



（2）



3. 解：函数式 $Y=A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$．真值表如下：

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

综合练习 15

一、1. C　2. C　3. B　4. C　5. B　6. B　7. C　8. C
9. A　10. A　11. D　12. A　13. B　14. B　15. A

二、1．对$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\neq 1$．　　2．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x\geqslant 2$．

3．$\forall x\in\mathbf{R}$，$3<x<5$．　　4．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$．　　5．2^n

三、1．解：$p\vee q$：某班同学不都是共青团员或都是女生；

$p\wedge q$：某班同学不都是共青团员且都是女生；

$\neg p$：某班同学都是共青团员；

$\neg q$：某班同学不都是女生．

2．略．

3．（1）10000000.0101；（2）1100101.000111．

4．（1）$L=\bar{B}C+\bar{A}B+A\bar{C}$

（2）$L=A+C+BD+\bar{B}EF$

5．$Y=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+ABC$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1		1	1
11		1	1	1
10			1	1

6．解：由表达式画出卡诺图，画包围圈合并最小项，得简化的与—或表达式：

$$L(A,B,C,D)=C+\bar{A}\bar{D}+ABD.$$

第 16 章　算法与程序框图

16.1　算法的概念和描述

16.1.1　算法的概念

【同步训练 16.1.1】

A　组

1．（1）基本运算及规定的运算顺序；

（2）①计算总成绩 $H=A+B+C+D$　②计算平均成绩 $E=\dfrac{H}{4}$

2．算法一比算法二用时间长，算法二更高效．节约时间．

B　组

1．第一步：将 A 中的水倒入 C 中；

第二步：将 B 中的酒倒入 A 中；

第三步：将 C 中的水倒入 B 中，结束．

2．第一步：将 x 的值赋予 a；

第二步：将 y 的值赋予 x；

第三步：将 a 的值赋予 y，结束．

注意：一个算法往往具有代表性，能解决一类问题，如，题目 1 可以引申为：交换两个变量的值．

【知识链接】

解：

第一步：将 8 升桶中的水倒出 5 升至 5 升桶中，再将这 5 升水倒 3 升至 3 升桶中；

第二步：将这 3 升水全部倒入至 8 升桶中，将 5 升桶中剩余的 2 升水全部倒入至 3 升桶中；

第三步：将 8 升桶中的水倒出 5 升至 5 升桶中，再将 5 升桶中的 1 升水倒入 3 升桶中；

第四步：将 3 升桶中的 3 升水全部倒入 8 升桶中.

16.1.2　算法的描述

【同步训练 16.1.2】

A　　组

1.（1）自然语言、程序框图、计算机语言；

（2）S3：将 S2 的结果 6 乘以 4 得 24；

S4：将 S3 的结果 24 乘以 5 得 120.

2.（1）B　　　（2）C

3．解：　按照逐一相乘的程序进行

S1：计算 1 乘以 3 ，得到 3；

S2：将 S1 中的运算结果 3 与 7 相乘，得到 21；

S3：将 S2 中的运算结果 21 与 9 相乘，得到 189；

S4：将 S3 中的运算结果 189 与 11 相乘，得到 2 079；

S5：输出结果.

4．解：　可利用公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$　求解.

S1：　取 $a=3$，$b=3$，$c=4$；

S2：　计算 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$；

S3：　计算三角形的面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ；

S4：　输出 S 的值.

B　　组

1.（1）C　　　（2）B

2．输入 $n=100$，计算 $s=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3．解：可以运用公式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$直接求解.

S1：取 $x_1=-1$，$y_1=0$，$x_2=3$，$y_2=2$；

S2：代入公式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$得直线 AB 的方程；

S3：输出直线 AB 的方程.

【知识链接】

略.

16.2　程序框图与算法的基本逻辑结构

16.2.1　程序框图的基本图例

【同步训练 16.2.1】

A　　组

1.（1）A （2）A （3）B （4）A

2.（1）开始框，结束框.

（2）图形符号，加注文字说明.

（3）先后顺序，一，一，两.

3．解：流程图表示的算法如下：

S1：$0 \to S$，$1 \to i$；

S2：输入数值 G；

S3：$S+G \to S$；

S4：$i+1 \to i$；

S5：判断 $i \leqslant 10$ 是否成立，若成立执行 S2；否则执行 S6；

S6：$\frac{S}{10} \to A$；

S7：输出 A .

B　组

1.（1）B （2）D （3）D （4）A

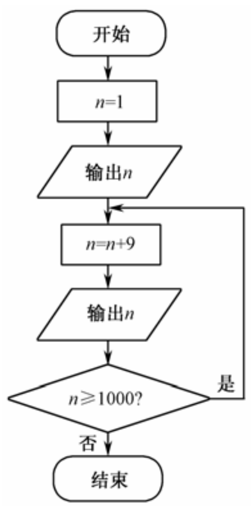
2.（1）输出 a，b，c 中的最大值；

（2）① 判断，$d<0$？，

② 处理，$x_1=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ ，

③ 输出，输出 x_1，x_2 .

3.



【知识链接】

S1：输入整数 x；

S2：判断 x 能否被 2 整除，若能则输出“x 是偶数”，否则输出“x 是奇数”；

S3：结束.

16.2.2　顺序结构及其框图

【同步训练 16.2.2】

A　组

1.（1）C（2）D

2.（1）顺序结构、条件分支结构、循环结构，顺序.

（2）4；2；2.

3．解：梯形面积的算法如下：

S1： $5 \rightarrow a$ ；

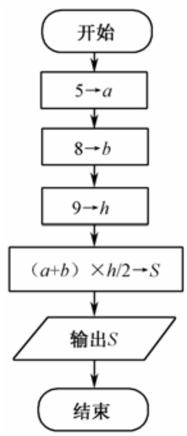
S2： $8 \rightarrow b$；

S3： $9 \rightarrow h$ ；

S4： $(a+b)\times h/2 \rightarrow S$ ；

S5： 输出 S.

梯形面积的算法流程图如下：



B 组

1.（1）依次排列，顺次.　　（2）4；10.

2．**解**：算法为：

S1：输入 x，y；

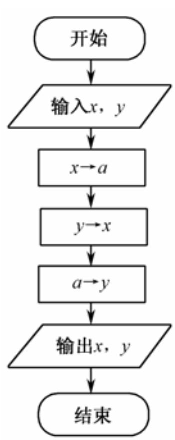
S2：$x \rightarrow a$ ；

S3：$y \rightarrow x$；

S4：$a \rightarrow y$；

S5：结束

程序框图如下图所示.



【知识链接】

略.

16.2.3　条件分支结构及其框图

【同步训练 16.2.3】

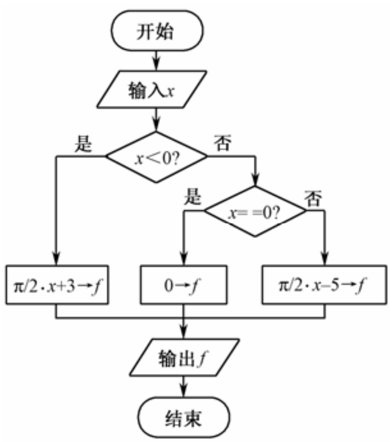
A　　组

1．（1）D　　（2）B

2．（1）4；-3.

（2）$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqslant 0) \\ x^3 & (x<0) \end{cases}$.

3．



B　　组

1．（1）C（2）D

2．（1）①　$x>0$；②$-x\to a$；③ 输出 a　.

（2）m=0? .

3．解：求 $y=|x-1|$ 的算法如下：

S1：　输入 x；

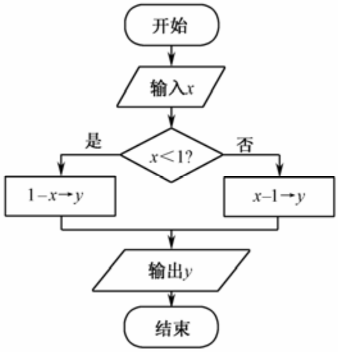
S2：　判断 $x\leqslant 1$ 是否成立，若成立，执行 S3，否则执行 S4；

S3：　$1-x\to y$，执行 S5；

S4：　$x-1\to y$，执行 S5；

S5：　输出 y.

程序框图如下：



4．解：该超市促销期间收款的算法如下：

S1： 输入标价 m；

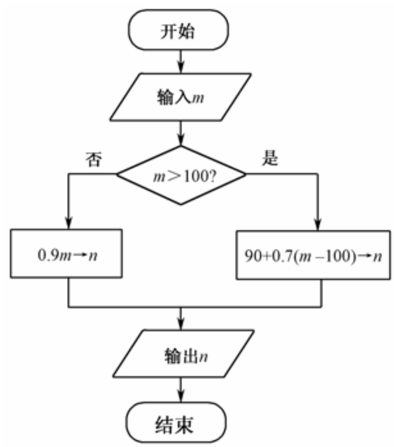
S2： 判断 $m>100$ 是否成立，若成立，执行 S4；

S3： $0.9m \to n$，执行 S5；

S4： $90+0.7(m-100)\to n$；

S5： 输出收款数量 n.

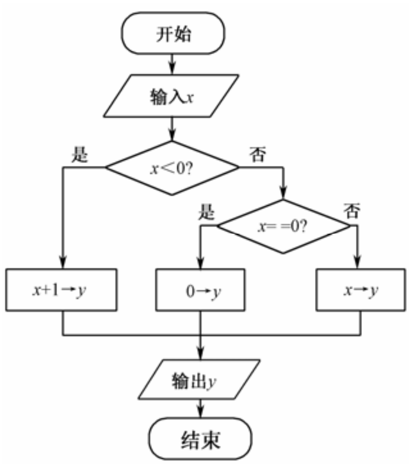
该超市促销期间收款的算法流程图如下：



【知识链接】

（1）计算函数 $f(x)=\begin{cases} x\ (x>0) \\ 0\ (x=0) \\ x+1\ (x<0) \end{cases}$ 的值；

（2）该算法的流程图为：



16.2.4　循环结构及其框图

【同步训练 16.2.4】

A　　组

1．（1）B（2）A （3）D

2.（1）操作 A，判断条件，操作 A，操作 A.

（2）15.

3．解：算法：

S1：$1\to i$；

S2：$0\to sum$；

S3：如果 $i\leqslant 100$ 执行 S4，否则转去执行 S7；

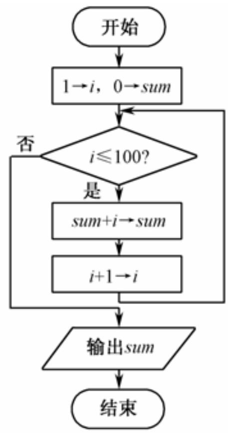
S4：sum+i→sum；

S5：$i+1\to i$ ；

S6：转去执行 S3；

S7：输出 sum 的值.

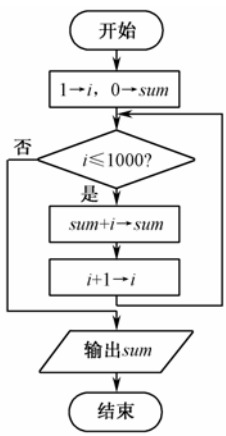
程序框图如下：



B　　组

1.（1）B （2）B

2.



3．解：我们用变量 T 保存积，算法开始时，T 的值应为 1．按照逐一相乘的程序进行：

S1：$1\to T$，$3\to i$ ；

S2：$T\times i\to T$；

S3：$i+2\to i$；

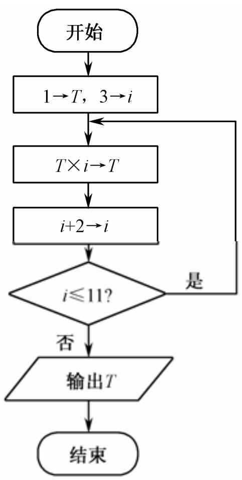
S4：判断 $i\leqslant 11$ 是否成立，若成立，则执行 S2；否则执行 S5；

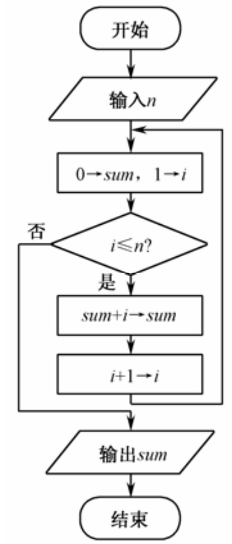
S5：输出变量 T 的值.

程序框图如下图左所示 .

【知识链接】

如下图右所示。





16.3 条 件 判 断

【同步训练 16.3】

A 组

1.（1）MOD（x，3）==1；

（2）x<=10；

（3）x<>y.

2.（1）(x>y) AND (y<=z)；

（2）(a<>b) AND (x=0)；

（3）NOT((x>=z) OR (y>=z)).

B 组

1.（1）(MOD（x,4）==1) AND (MOD（x,5）==0)；

（2）(a<=10) AND (a>=1)；

（3）(x=2) AND (y<>1).

2.（1）(x<y) AND (y>z)；

（2）(a=b) OR (a=0)；

（3）(x=0) OR (y=0).

【知识链接】

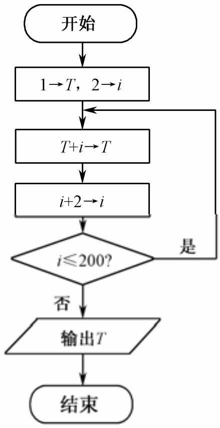
$A+B+C\to H$; $\frac{H}{3}\to A$.

16.4　算 法 案 例

【同步训练 16.4】

A　　组

1.



2．解：算法如下：

S1：输入 x；

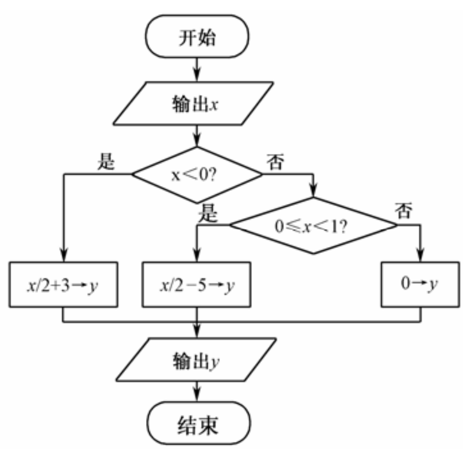
S2：如果 $x<0$，则使$\frac{x}{2}+3\to y$；

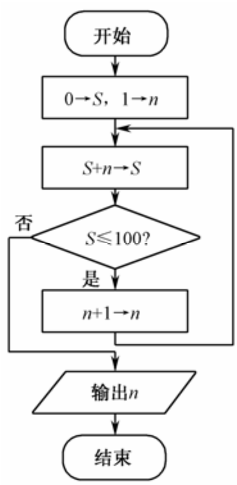
S3：如果 $0\leqslant x<1$，则使$\frac{x}{2}-5\to y$，输出 y，否则 $0\to y$；

S4：输出 y；

相应程序框图如下图左所示.

3．如下图右所示

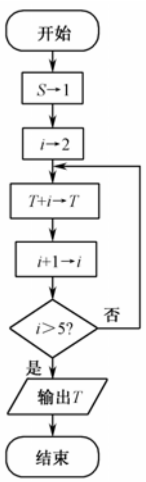


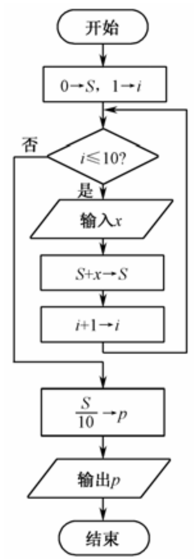


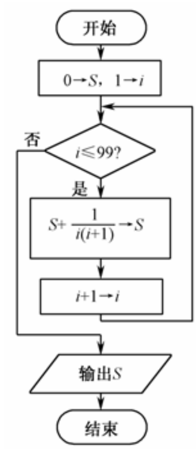
B　　组

1．②③④

2.　　　　　　　　3.　　　　　　　　4.







综合练习 16

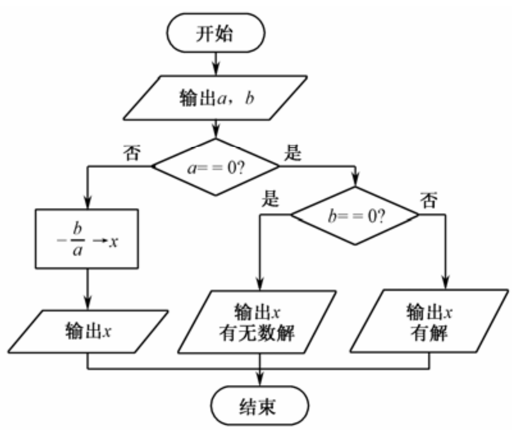
一、1. C　2. B　3. C　4. D　5. A　6. C　7. B　8. C　9. B　10. D

二、11.　MOD（x，4）＝＝3；　12. 条件判断；13. i＜5？；

14. 判断输入整数的奇偶；m＜＞0.

三、

15.



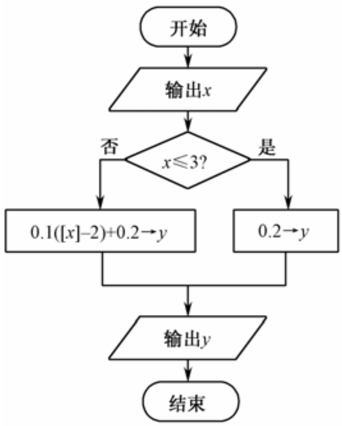
16. 解：算法为：

S1：输入 x；

S2：判断 $x\leqslant 3$ 是否成立，如果成立则执行 $0.2\to y$，否则执行 $0.1([x]-2)+0.2\to y$；

S3：输出 y；

S4：结束



17．解：

算法：

S1：$0 \to s$，$2 \to i$；

S2：判断 i≤80 是否成立，如果成立执行 S3，否则执行 S6；

S3：$s+n \to s$；

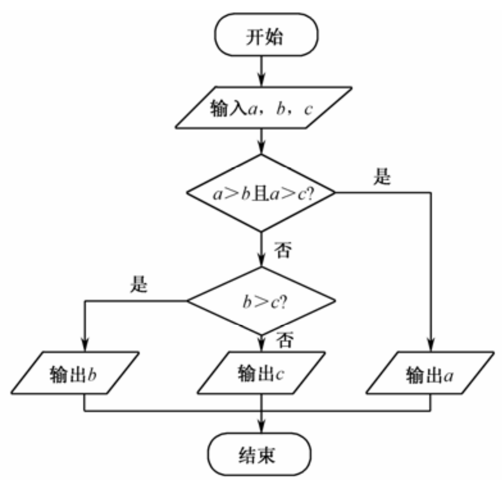
S4：$i+2 \to i$；

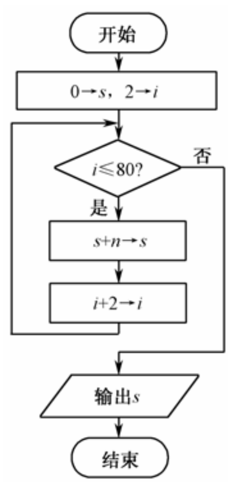
S5：执行 S2；

S6：输出 s.

如下图左所示。

18．如下图右所示。





19．解：（1）{1，3，5，7，9，11，13，15，17，19}，

通项公式为 $a_n=2n-1$，$n \in \mathbf{N}_+$，且 n≤10.

（2）变更 A 框为：“写下 0”，这时操作流程图，可依次得：0，2，4，…，18，恰好为数列通项公式为{$2n-2$}的前 10 项.

第 17 章　数据表格信息处理

17.1　数组、数据表格的概念

【同步训练 17.1】

A　组

1．（1）（4，5，7，3，5，1），六维数组

（2）（8，2，1，2），（6，6，2，8），（6，3，6，7），（4，4，7，11），（5，2，9，14）

四维数组

序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖
1	某市第一职业中专	8	2	1	2
2	某市第二职业中专	6	6	2	8
3	某市工贸职业中专	6	3	6	7
4	某市机电职业中专	4	4	7	11
5	某市商业学校	5	2	9	14

2．2，3

3．$x=1$，$y=2$ 和 $z=-2$.

B　组

1．（34，32，11，35，27，8）

2．

姓名	专业理论（40 分）	专业实训（60 分）	总分
孙小惠	35	54	89
李曾杰	34	46	80
齐志凤	31	58	89
徐明会	25	31	56
王露璐	38	44	82

将上表更改为如下表格形式：

	孙小惠	李曾杰	齐志凤	徐明会	王露璐
专业理论（40 分）	35	34	31	25	38
专业实训（60 分）	54	46	58	31	44
总分	89	80	89	56	82

3．1，2，3.

【知识链接】

配件名称		丝杠	齿轮	联轴器	主轴
售价（元）		860	320	110	1350
月份（件）	一月	22	60	66	18
	二月	46	80	70	31
	三月	28	50	78	40
总销售量（件）		96	190	214	89

这个公司在第一季度的总销售额是 287 050 元.

17.2　数组的代数运算

【同步训练 17.2】

A　　组

1．（1）$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(7，-6，17，-4)$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(4，-9，6，7)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$.　（2）30.

2.

（1）$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2，-7，4，3)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(1，-11，2，-1)$，$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-28$.

（2）$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1，-1，-6，6，11，7)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2，-3，-8，3，-7，1)$，$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$.

3．$x=-2$.

4．（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(-4，5，-1)$;　（2）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-114，-38，19)$;

（3）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=(-126，0，-84)$;　（4）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})=(-80，-112，-32)$.

B　　组

1．$\lambda=-2$，$\mu=1$.

2．$\alpha=0$，$\beta=2$，$\gamma=-3$.

3．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

【知识链接】

	A	B	C	D	E	F	G
1	序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖	总分
2	5	某市商业学校	2	6	8	14	82
3	1	某市第一职业中专	4	6	4	4	74
4	3	某市工贸职业中专	2	5	8	7	70
5	2	某市第二职业中专	3	4	6	8	67
6	4	某市机电职业中专	1	3	10	11	63
7	总 计		12	24	36	44	

17.3　用软件处理数据表格

【同步训练 17.3】

A　　组

1．（1）C　（2）A　（3）D　（4）D　（5）C　（6）A　（7）D　（8）A

2．（1）

	A	B	C	D	E	F	G
1	序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖	总分
2	5	某市商业学校	2	6	8	14	82
3	1	某市第一职业中专	4	6	4	4	74
4	3	某市工贸职业中专	2	5	8	7	70
5	2	某市第二职业中专	3	4	6	8	67
6	4	某市机电职业中专	1	3	10	11	63
7	总 计		12	24	36	44	

（2）一等奖、二等奖、三等奖各占所有奖项总和的百分比分别为 10.3%，20.7%，31.0%.

（3）

	A	B	C	D	E	F	G
1	序号	学校	一等奖	二等奖	三等奖	优秀奖	总分
5	2	某市第二职业中专	3	4	6	8	67
6	4	某市机电职业中专	1	3	10	11	63

B　组

1．（1）D　（2）C　（3）B　（4）A　（5）C

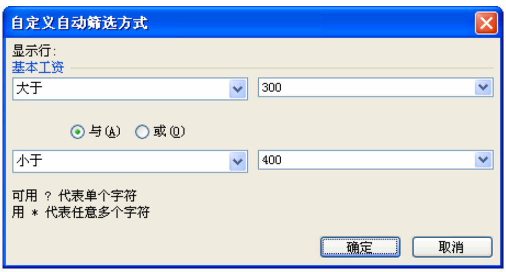
2．（1）　条件格式　　（2）　4

3．8103.72414．

4．（1）选中“基本工资”单元格，选择“数据”菜单下“筛选”中的“自动筛选”命令；

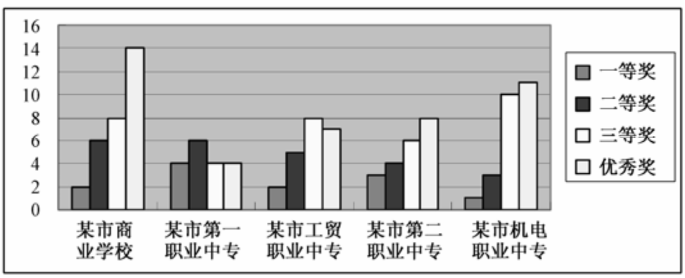
（2）单击“基本工资”单元格中的下拉菜单，选中“自定义…”选项，呼出自定义自动筛选方式对话框；

（3）更改对话框中的条件，如下图所示，点击确定，即可．

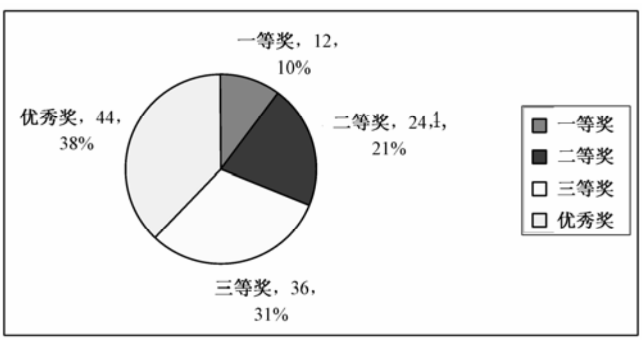


【知识链接】

（1）



（2）



17.4　数据表格的图示

【同步训练 17.4】

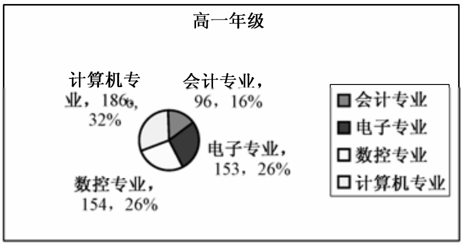
A　组

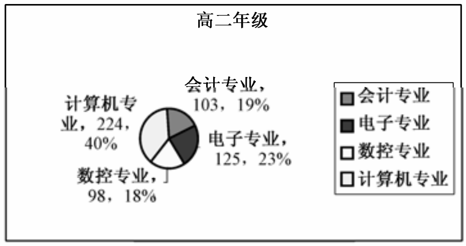
1.（1）B　（2）C　（3）D　（4）D　（5）A

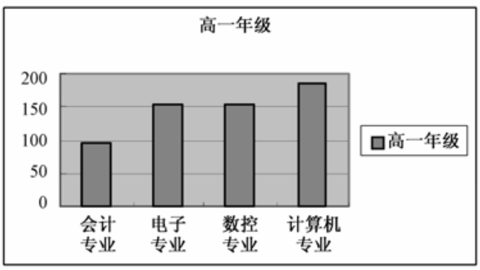
2.

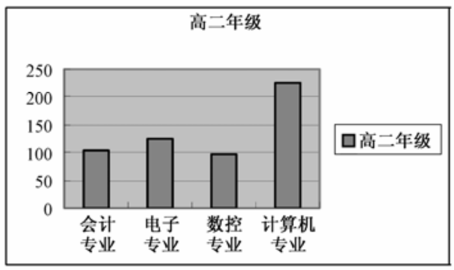
	A	B	C	D	E	F
1		会计专业	电子专业	数控专业	计算机专业	合计
2	高二年级	103	125	98	224	550
3	高一年级	96	153	154	186	589
4	合计	199	278	252	410	1139

（2）



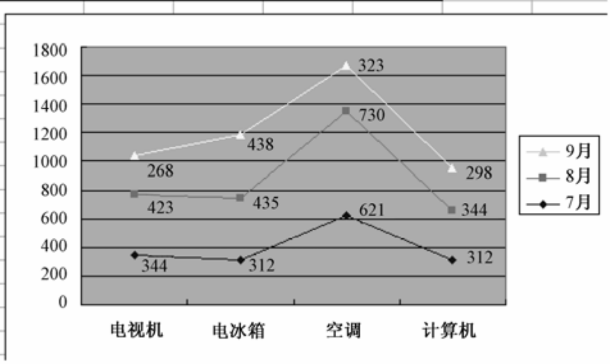






3.

	A	B	C	D	E	F	G
1		电视机	电冰箱	空调	计算机		
2	7月	344	312	621	312		
3	8月	423	435	730	344		
4	9月	268	438	323	298		
5	合计	1035	1185	1674	954		

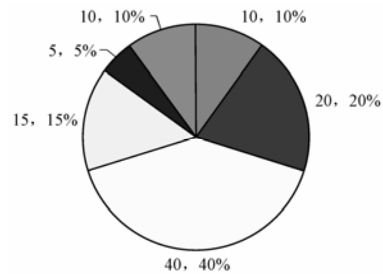


B　组

1.（1）选中需要做柱形图的数据区域，点击工具栏中的图表向导按钮；

（2）在图表类型中，选中柱形图，然后根据要求，逐步点击下一步，最后完成.

2.



综合练习 17

一、1．真　2．假　3．假　4．真　5．真　6．假　7．假　8．假　9．真　10．真

二、1．C　2．B　3．C　4．D　5．A　6．B　7．C　8．B

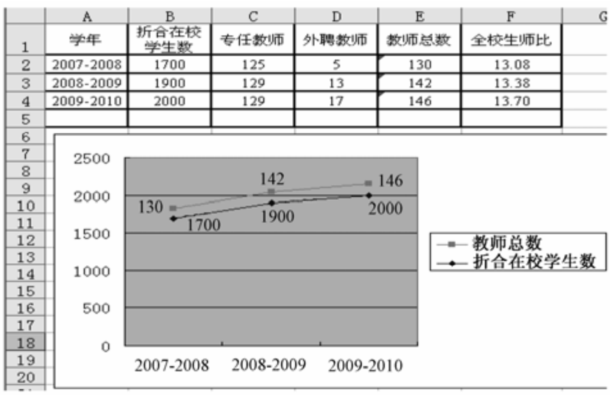
三、1．8　2．(1，0，0)　3．3　4．$a\cdot b\cdot c$＝(3，－6，0)

5．“插入”中的“图表”选项　6．SQRT()　7．3　8．=A2+$B$1

四、

内积	***a***	***b***
a	14	－16
b	－16	22

五、



六、α=1，β=2，γ=－1.

七、选中所有数据，然后选中“数据”菜单中的排序，按照专业为主要关键字，奖学金为次要关键字，次要关键字按照降序排列，点击确定即可.

第 18 章　编制计划的原理和方法

18.1　编制计划的有关概念

【同步训练 18.1】

A　组

1．C　2．B　3．C　4．（1）错　（2）错　（3）对

B　组

1. D　2. A

3.（1）

序号	工作名称	持续时间	紧前工作
1	A	2	—
2	B	2	A
3	C	5	A
4	D	3	B
5	E	4	B，C
6	F	1	D，E

（2）E，B　　（3）＜3,4＞

【知识链接】

走法一：①→②→④→⑥，距离为 11；　走法二：①→②→④→⑤→⑥，距离为 10；

走法三：①→③→④→⑥，距离为 6；　走法四：①→③→④→⑤→⑥，距离为 5.

18.2　关键路径法

【同步训练 18.2】

A　组

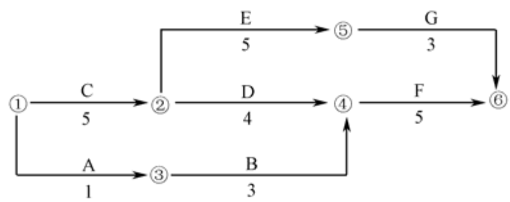
1.

序号	工作	工期/天	紧前工作
1	A	5	—
2	B	1	—
3	C	5	A，B
4	D	6	A，B
5	E	2	B
6	F	3	C，D，E
7	G	5	D，E

2. 邻接表：

序号	工作	工期/天	紧前工作
1	A	1	—
2	B	3	A
3	C	5	—
4	D	4	A，C
5	E	5	A，C
6	F	5	B，D
7	G	3	E

网络图：



关键路径为：①→②→④→⑥；

路径①→②→④→⑥的路长为 14（天）；

路径①→③→④→⑥的路长为 9（天）；

路径①→③→⑤→⑥的路长为 13（天）.

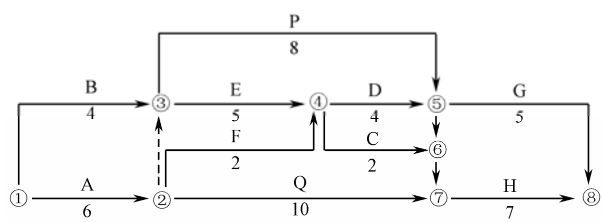
B　组

1．路径①→②→⑤→⑥→⑦，路长为 15；　路径①→②→④→⑥→⑦，路长为 18；

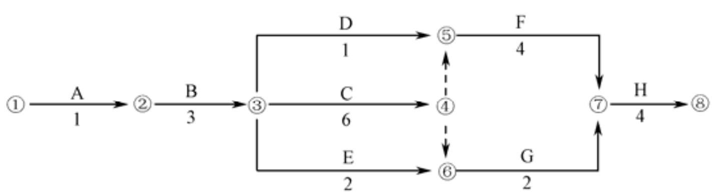
路径①→②→④→⑤→⑥→⑦，路长为 16；　路径①→②→③→⑦，路长为 12.

2．

序号	工作	工期/天	紧前工作
1	A	6	—
2	B	4	—
3	C	2	E，F
4	D	4	E，F
5	E	5	A，B
6	F	2	A
7	G	5	D，P
8	H	7	C，D，P，Q
9	P	8	A，B
10	Q	10	A



【知识链接】



关键路径为：

①→②→③→④→⑤→⑦→⑧，路长为 18.

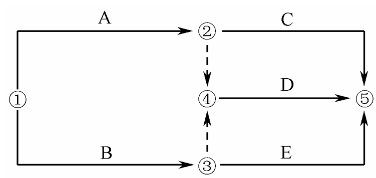
18.3　统　筹　图

【同步训练 18.3】

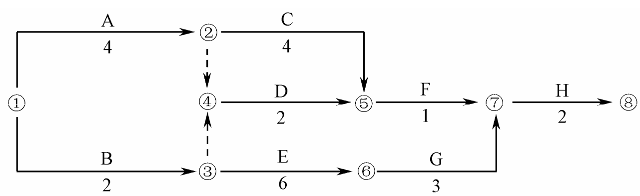
A　组

1．C　　2．C　　3．D　　4．A　　5．A

6．



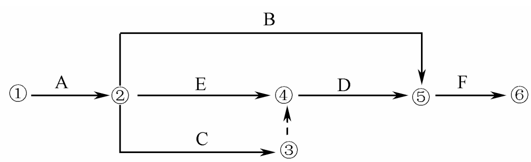
7．



关键路径是：①→③→⑥→⑦→⑧，路长为 13 天.

8．

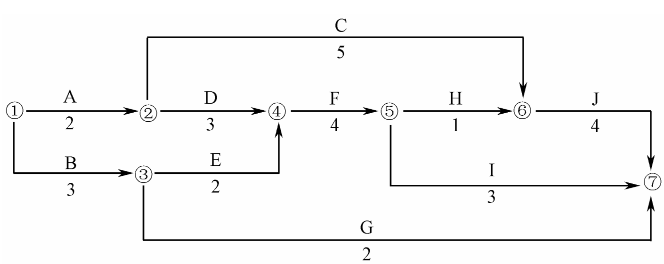
工作代号	A	B	C	D	E	F
紧前工作	—	A	A	C，E	A	B，D



B　组

1．A　　2．C　　3．C

4．（1）



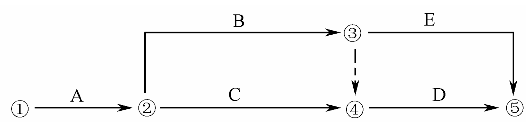
关键路径有两条，分别是：①→②→④→⑤→⑥→⑦和①→③→④→⑤→⑥→⑦；

关键路径的路长为 14.

（2）略.

【知识链接】

工作代号	A	B	C	D	E
紧前工作	—	A	A	B，C	B



18.4　进度计划的编制

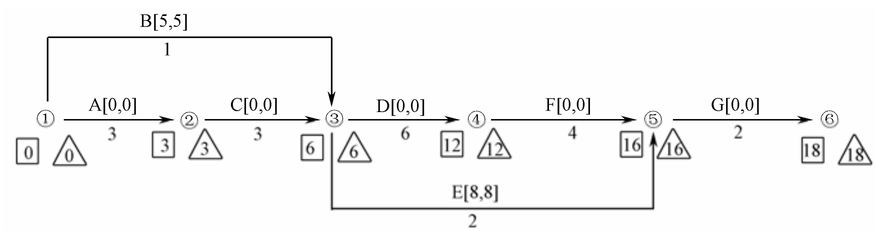
18.4.1　网络图的时间参数

【同步训练 18.4.1】

A　组

1．C　2．C　3．C　4．C

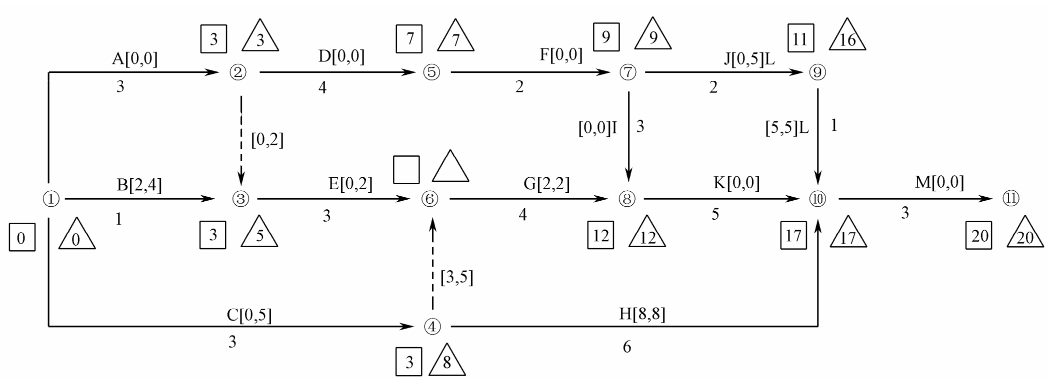
5．



B　组

1．A　2．B　3．D　4．D　5．C　6．D　7．A

8．（1）

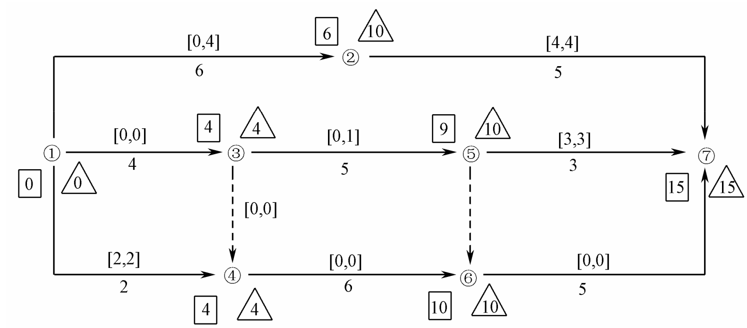


（2）关键线路：

①→②→⑤→⑦→⑧→⑩→

路长为 20 月.

【知识链接】



18.4.2　时间优化的方法

【同步训练 18.4.2】

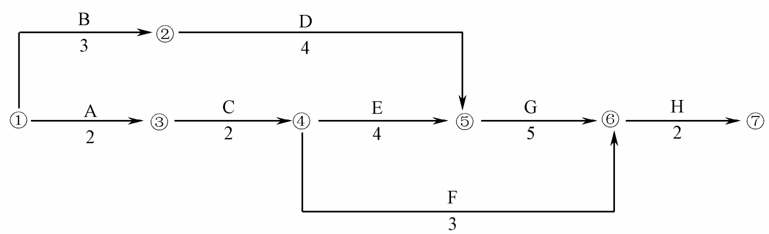
A　　组

1．D　　2．C　　3．A　　4．A　　5．A

B　　组

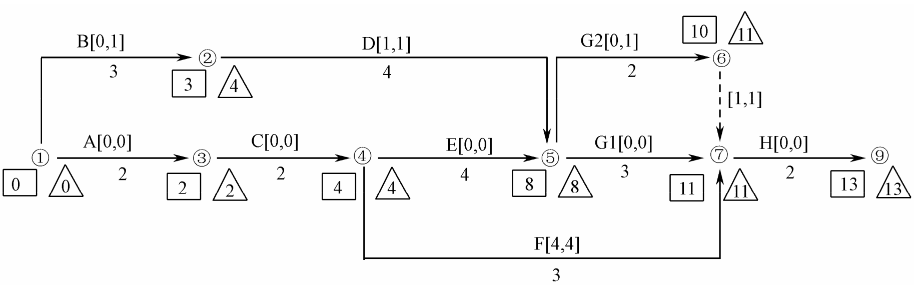
1．C　　2．D

3．



关键路径是：①→③→④→⑤→⑥→⑦；路长为 15（天）.

（2）



关键路径是：①→③→④→⑤→⑦→⑨；总工期为 13（天）.

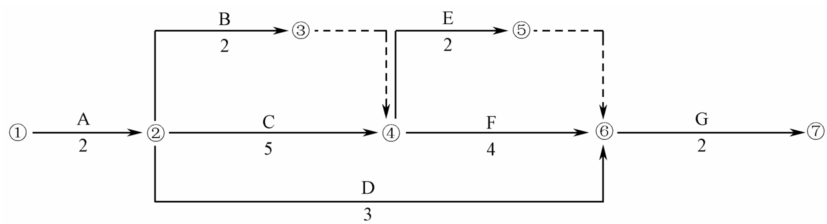
综合练习 18

一、1. B　2. C　3. C　4. C　5. C　6. A　7. B　8. D

二、9. 并进关系　10. 时间；资源　11. 1　12. 最早开始

13. 甘特图　14. $R（i,j）=0$　15. $T_E（i）=T_L（i）$

三、16.（1）由邻接表可以看出，B，C，D 是 A 的紧后工作，可以平行展开；E，F 是 B，C 的紧后工作，并且是平行关系；D，E，F 是 H 的紧前工作；H 工作的箭头节点是终点节点．网络图如图所示．



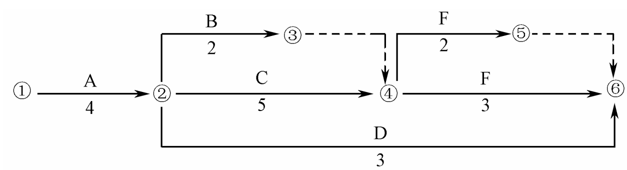
（2）该统筹问题共需要 2+5+4+2=11（天）完工．

17.

（1）

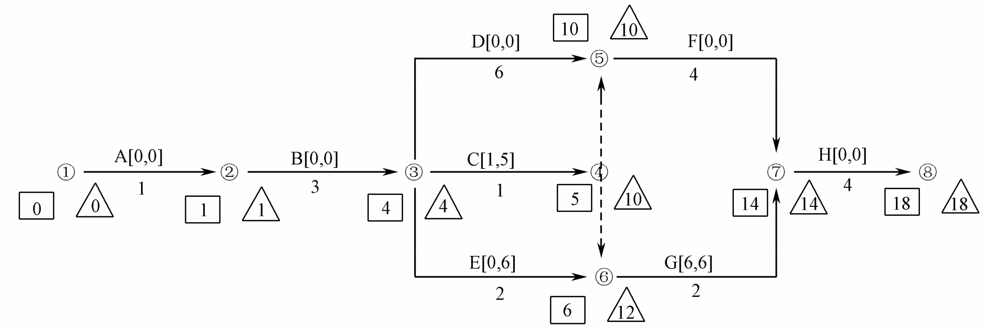
工作	A	B	C	D	E	F
工期/天	4	2	5	3	2	3
紧前工作	—	A	A	A	B，C	B，C

（2）



（3）由于关键路径的长度为 4+5+3=12（天），故该统筹问题的总工期为 12 天．

18.



第 19 章　线性规划初步

19.1　线性规划问题

【同步训练 19.1】

A　组

1．（1）D（2）C（3）D（4）A（5）A

2．（1）$3x+y\leqslant 13$；（2）$2x+3y\leqslant 18$；（3）$\begin{cases}3x+y\leqslant 13\\2x+3y\leqslant 18\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$；（4）$z=5x+3y$.

B　组

1．（1）A（2）C

2．（1）$\begin{cases}x+y\leqslant 5\\x\leqslant 3\\y\geqslant 1\\x\in \mathbf{Z}\\y\in \mathbf{Z}\end{cases}$；（2）$\begin{cases}15x+5y\leqslant 1000\\x\in \mathbf{N}\\y\in \mathbf{N}\end{cases}$；$z=20x+10y$.

3．（1）$\begin{cases}35x+24y\geqslant 106\\x\in \mathbf{N}\\y\in \mathbf{N}\end{cases}$；（2）$z=140x+120y$.

【知识链接】

1．两；$(1，1)$；$>$.

2．略.

19.2　二元一次不等式表示的区域

【同步训练 19.2】

A　组

1．（1）D（2）C（3）A（4）B

2．（1）$Q(-1，1)$；（2）$s+t>5$；（3）1.

3．略.

B　组

1．（1）B（2）B（3）B（4）D

2．（1）异侧；（2）$3m+2n>1$；（3）$\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0\\x+y-2\leqslant 0\\y+1\geqslant 0\end{cases}$.

3. $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x-y-1\leqslant 0\\x+y+1\geqslant 0\\x-y-1\leqslant 0\end{cases}$.

【知识链接】

1. (0，3)，(0，4)，(0，5)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)， (2，2)，(2，3)，(3，1)，(3，2).

2.（1）略；（2）(0，1)，(0，2)，(0，3)，(0，4)，(0，5)，(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(3，1)，(3，2).

19.3 线性规划的图解法

【同步训练 19.3】

A 组

1.（1）C（2）D（3）B

2.（1）1； （2）11.

3. $z_{\max}=7$；$z_{\min}=-\dfrac{17}{5}$.

B 组

1.（1）D（2）C（3）C

2.（1）9；（2）18.

3. $z_{\max}=27$，此时最优解为(2，3)；$z_{\min}=0$，此时最优解为(0，0).

【知识链接】

1.（1）$\begin{cases}x+y\leqslant 100\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$；（2）$\begin{cases}x+y\leqslant 100\\x\geqslant 50\\y\geqslant 0\end{cases}$.

2．方案一：一个书包，一件玩具；方案二：一个书包，两件玩具；方案三：一个书包，一件玩具，一本书；方案四：一个书包，两件件玩具，一本书.（对应点略).

19.4 线性规划问题的应用举例

【同步训练 19.4】

A 组

1. 托运集装箱甲产品 4 件，托运集装箱乙产品 1 件，可获最大利润 60 万元.

2. 生产 A 产品 0 吨，生产 B 产品 50 吨，可获得最大利润 75 万元.

3. 使用甲原料 28g，使用乙原料 30g，才能既满足营养又使费用最省，最小费用为 14.4 元.

B 组

1. 使用甲种药品 50 千克，乙种药品 20 千克，丙种药品 30 千克，可使总成本最低为 710 元.

2. 该木器加工厂加工书桌 100 张，加工书橱 400 个，获得利润的最大值为 56000 元.

3．每小时生产约 0.22 千克的产品将污水直接排入河流，每小时生产约 3.53 千克的产品将污水处理后排入河流，可使其每小时获得最大收益 77.79 元.

19.5　用 Excel 解线性规划问题

【同步训练 19.5】

A　组

1．当 $x=3$，$y=4$ 时，$z_{max}=18$.

2．当 $x=3$，$y=3$ 时，$z_{min}=9$.

3．当 $x=5$，$y=3$ 时，$z_{max}=7$；当 $x=1$，$y=5$ 时，$z_{min}=-3$.

B　组

1．$[-1，2]$.

2．$z_{max}=27$，此时最优解为$(2，3)$；$z_{min}=0$，此时最优解为$(0，0)$.

3．甲方式约种 6.7 公顷，乙方式约种 13.3 公顷，可使总收入最大约为 22666.67 元.

综合练习 19

一、1．A　2．D　3．B　4．B　5．C　6．A　7．B　8．B　9．B　10．D

二、1．16；　2．$\begin{cases} x+y+2\geqslant 0 \\ x+2y+1\leqslant 0 \\ 2x+y+1\leqslant 0 \end{cases}$；　3．4；　4．$4\sqrt{2}$.

三、1．（1）略；（2）略.

2．当 $x=1$，$y=0$ 时，$z_{max}=5$.

3．需要甲型号的纸 30 万张，乙型号的纸 90 万张.

4．每天生产甲种大衣柜 4 个，乙种大衣柜 8 个，可使每天获得的利润最大为 272 元.

第 20 章　复　　数

20.1　复数的概念

20.1.1　复数的有关概念

【同步训练 20.1.1】

A　组

1．（1）D　（2）A　（3）B

2．（1）0；（2）1，−1；（3）±1.

3．（1）$x=-1$ 或 -2；（2）$x\neq-1$ 且 $x\neq-2$；（3）$x=1$.

4．（1）$x=3$，$y=-8$ 或 $x=-8$，$y=3$；（2）$x=\frac{4}{3}$，$y=-\frac{3}{2}$.

B　组

1.（1）C（2）D（3）D　2.（1）$-\frac{1}{2}$;（2）0;（3）1，−1.

3.（1）若 z 是实数，则 $m^2-3m-10=0$，解得 $m=2$ 或 $m=-5$；

（2）若 z 是虚数，则 $m^2-3m-10\neq0$，解得 $m\neq2$ 且 $m\neq-5$；

（3）若 z 是纯虚数，则 $\begin{cases}m^2+3m-10\neq0\\m^2-5m+6=0\end{cases}$，解得 $m=3$.

4．$x=\frac{1}{2}$，$y=2$.

【知识链接】

1.（1）一一对应；（2）一一对应；（3）一一对应．2．$\sqrt{a^2+b^2}$.

20.1.2　复数的几何意义

【同步训练 20.1.2】

A　组

1.（1）B（2）A（3）D　2.（1）$2+\sqrt{3}$；（2）2；（3）$a-b$i.

3．$\bar{z}=3+4$i 或 $3-4$i.

B　组

1.（1）B（2）C（3）D　2.（1）2+2i；（2）13；（3）3−4i.

3.设 $z=x+y$i$(x，y\in\mathbf{R})$，满足$|z|=5$ 对应的点在复平面上以原点为圆心，5 为半径的圆上；满足 $3<|z|<5(z\in\mathbf{C})$ 的复数 z 对应的点在复平面上表示以原点为圆心，半径 3 至 5 的圆环.

【知识链接】

1.（4，7）；2.（−2, −3）.

20.2　复数的运算

20.2.1　复数的加法和减法

【同步训练 20.2.1】

A　组

1.（1）D（2）B（3）A　2.（1）−11i；（2）$x<-1, y<1$；（3）210＋230 i.

3．设 $D(x，y)$，则

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$对应的复数为$(x+y\text{i})-2\text{i}=x+(y-2)\text{i}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$对应的复数为：$(2+6\text{i})-(4-4\text{i})=-2+10\text{i}$，

因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ 所以 $x+(y-2)\text{i}=-2+10\text{i}$，

所以$\begin{cases}x=-2\\y-2=10\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-2\\y=12\end{cases}$.

所以 D 点对应的复数为$-2+12$i.

4. $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为 z_2-z_1，则

$z_2-z_1=a-1+(a^2+2a-1)\mathrm{i}-[a^2-3+(a+5)\mathrm{i}]=(a-a^2+2)+(a^2+a-6)\mathrm{i}$

因为 z_2-z_1 是纯虚数，

所以 $\begin{cases}a-a^2+2=0\\a^2+a-6\neq0\end{cases}$，解得 $a=-1$.

B 组

1.（1）B（2）C（3）D　　2.（1）2+8i；（2）3+4i 或 3−4i；（3）5−2i.

3. $x=-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

【知识链接】

1.（1）$ac+ad+bc+bd$；（2）$ac-ad-bc+bd$.　　2.（1）3−i；（2）24+7i.

20.2.2 复数的乘法和除法

【同步训练 20.2.2】

A 组

1.（1）B（2）A（3）B　　2.（1）$\frac{4}{25}-\frac{3}{25}\mathrm{i}$；（2）5；（3）29i.

3. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$.　　4. $z=2+\mathrm{i}$.

B 组

1.（1）A（2）C（3）A　2.（1）2；（2）−2+i；（3）4+3i 或−4−3i.

3. i .　　4. $x=1$，$y=11$.

【知识链接】

1. $x=\pm2\mathrm{i}$.　　2. 若 $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 或 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

20.3 实系数一元二次方程的解法

【同步训练 20.3】

A 组

1.（1）D（2）C（3）B

2.（1）$-1+\sqrt{3}$ 或 $-1-\sqrt{3}$；（2）−1+i 或−1−i；（3）$\frac{3}{4}+\mathrm{i}$.

3. 另一个根为 $2-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$a=-4$，$b=7$.

B 组

1.（1）C（2）D（3）C　2.（1）$a=-2$；（2）−6，25；（3）1.

3. $2x^2+ax+b=0$ 一根为 $-3+2\mathrm{i}$，另一根为 $-3-2\mathrm{i}$. 由韦达定理知：

$b=(-3+2\mathrm{i})(-3-2\mathrm{i})=9+16=25$,

$a=-3+2\mathrm{i}+(-3-2\mathrm{i})=-6$.

【知识链接】

1．（$5\cos\alpha,5\sin\alpha$）．　　2．$\sqrt{2}$，（1,1），（$\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha$）．

20.4　复数的三角形式

20.4.1　复数的三角形式

【同步训练 20.4.1】

A　组

1．（1）C（2）D（3）B　　2．（1）0，π；（2）$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$．

3.（1）$\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；$\frac{\pi}{4}$（2）$\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；$\frac{5\pi}{3}$

4．（1）$8(\cos0+i\sin0)$；（2）$5(\cos\pi+i\sin\pi)$；（3）$4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$；

（4）7（$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$）；（5）$2\sqrt{2}$（$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$）；（6）$2\sqrt{2}$（$\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$）．

B　组

1．（1）D（2）D（3）A

2．（1）第四象限；（2）$\frac{7\pi}{4}$；（3）$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$；（4）$\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$．

3．$\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=\frac{5}{13}$．

4．（1）$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$；　　（2）$3-3\sqrt{3}i$；（3）$\sqrt{3}+\sqrt{3}i$；（4）$-\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$．

5．2（$\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$）．

6．$z_1=b+ai$ 的三角形式为：$r[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]$；

$z_2=-a+bi$ 的三角形式为：$r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$；

$z_3=-a-bi$ 的三角形式为：$r[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$；

$z_4=a-bi$ 的三角形式为：$r[\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)]$．

【知识链接】

1．i．　　2．i．

20.4.2　复数三角形式的乘法与乘方运算

【同步训练 20.4.2】

A　组

1．（1）B（2）D（3）B

2．（1）$\cos60^\circ+i\sin60^\circ$（或$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$）；（2）$\cos0^\circ+i\sin0^\circ$（或 1）；

（3）1；（4）−1.

3．$-3+4i$.

B　组

1．（1）B（2）D（3）C

2．（1）$4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$（或 $2+2\sqrt{3}i$）；（2）1；（3）6；

（4）7.　3．（略）.　4．0.

【知识链接】

1．2.　　2．2.

20.4.3　复数三角形式的除法运算

【同步训练 20.4.3】

A　组

1．（1）A（2）B（3）D

2．（1）$\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$（或$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$）；（2）$2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$（或$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$）；

（3）$2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$（或 $1-\sqrt{3}i$）；（4）$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

3．$z_2=-\sqrt{3}-3i$.

B　组

1．（1）C（2）A（3）A

2．（1）$2\pi-\theta$；（2）θ；（3）$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$.

3．B 对应的复数为：$-1+3i$，C 对应的复数为：$-2+i$；

或 B 对应的复数为：$3+i$，C 对应的复数为：$2-i$.

4．$\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$.

【知识链接】

1．−4；−4.　2．$2i$ 或 $-2i$.

20.4.4　复数的开方运算

【同步训练 20.4.4】

A　组

1．（1）C（2）B（3）A

2．（1）$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$或 $\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$；（2）$\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$或 $\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$；

（3）$\sqrt[4]{2}$.

3．-1，$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.（图略）.

4．另外的四个5次方根分别为：

$\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$，$\cos\frac{9\pi}{10}+i\sin\frac{9\pi}{10}$，$\cos\frac{13\pi}{10}+i\sin\frac{13\pi}{10}$，$\cos\frac{17\pi}{10}+i\sin\frac{17\pi}{10}$.

B　组

1.（1）C（2）B（3）A（4）D　2.（1）i，−1，−i；（2）正六边形；（3）0.

3．$z_1=2$，$z_2=1+\sqrt{3}i$，$z_3=-1+\sqrt{3}i$，$z_4=-2$，$z_5=-1-\sqrt{3}i$，，$z_6=1-\sqrt{3}i$.

4．$z_1=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$，$z_2=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$，

$z_3=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$，$z_4=2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$.

【知识链接】

1．a^{m+n}；a^{m-n}；　a^{mn}.

2.（1）$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$.（2）$\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$.（3）$\cos2\alpha+i\sin2\alpha$.

20.5　复数的指数形式

【同步训练 20.5】

A　组

1.（1）A（2）C（3）D　2.（1）$2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$；（2）6；（3）$\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$；

3.（1）$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$；（2）$z_1=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$，$z_2=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{13\pi}{24}}$，$z_3=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{24}}$，$z_4=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{37\pi}{24}}$.

B　组

1.（1）B（2）C（3）D　2.（1）$-ae^{i\pi}$；（2）$2e^{i\frac{3\pi}{2}}$；（3）$\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$；

3．$\sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$，$\sqrt[6]{2}e^{i\frac{15\pi}{12}}$，$\sqrt[6]{2}e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

综合练习 20

一、1．A　2．A　3．B　4．C　5．C　6．B　7．A　8．D　9．C　10．A　11．A　12．D 13．C　14．A　15．C　16．B　17．C　18．B　19．B　20．C

二、1．3；　2．1；　3．$3-3\sqrt{3}$　4．$\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$（或$\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$).

三、1．$|z|=5$.

2．直角三角形

3．解：因为$z^5=\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，

所以，$z=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)$（$k$=0，1，2，3，4），

所以，

$$z_1=\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\pi}{30}+i\sin\frac{\pi}{30}),$$

$$z_2=\sqrt[5]{2}(\cos\frac{13\pi}{30}+i\sin\frac{13\pi}{30}),$$

$$z_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

$$z_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{30}+\mathrm{i}\sin\frac{37\pi}{30}\right),$$

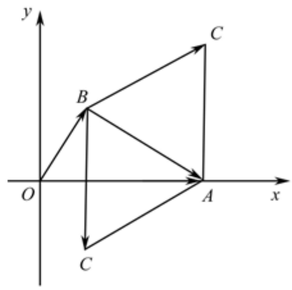
$$z_5=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{30}+\mathrm{i}\sin\frac{49\pi}{30}\right).$$

4．解：如右图所示，设 A 点对应的复数为 2，B 点对应的复数为$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

则$\overrightarrow{BA}=2-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

设第三个顶点 C，因为三角形是等边三角形，

将$\overrightarrow{BA}$按逆时针或顺时针旋转 60°，可得$\overrightarrow{BC}$.



所以$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$=2+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

或$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)[\cos(-60^\circ)+\mathrm{i}\sin(-60^\circ)]$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+(-\sqrt{3}\mathrm{i})$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

所以，第三个顶点对应的复数为 $2+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

第 21 章　概率分布初步

21.1　排列、组合

21.1.1　排列与排列数公式

【同步训练 21.1.1】

A　组

1．（1）排列；选排列；全排列；

（2）60；720；

（3）6；

（4）$\mathrm{A}_8^8=40320$.

2. （1）B　（2）A　（3）A　（4）B .
3. $A_4^3=24$. 略

B　组

1. （1）D　（2）C　（3）D　（4）D .
2. （1）$A_3^1+A_3^2+A_3^3=15$;（2）$\frac{2}{5}$.
3.（1）$A_2^2\ A_4^4=48$;（2）$A_4^2=288$;（3）$=240$;
（4）$A_6^6-A_2^2\ A_5^5=480$ 或 $A_4^4\ A_5^2=480$.

【知识链接】

3 种.

21.1.2　组合与组合数公式

【同步训练 21.1.2】

A　组

1.（1）组合;（2）组合数;（3）C_n^m;（4）C_n^{n-m};
（5）C_{n+1}^m;（6）14;（7）15;（8）20.
2. （1）B　（2）B　（3）B　（4）D .
3. $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$.

B　组

1. （1）B　（2）B　（3）D　（4）A
2. （1）30;（2）6 .
3.（1）因为某内科医生必须参加，某外科医生不能参加，因此从剩余 18 人中选出 4 人，即 $C_{18}^4=3060$ 种;（2）从内外科共 20 人中选 5 人共 C_{20}^5，除去从内科选 5 人或从外科选 5 人，因此满足条件共有 $C_{20}^5-C_{12}^5-C_8^5=14656$ 种 .

【知识链接】

略.

21.2　二项式定理

21.2.1　二项式定理

【同步训练 21.2.1】

A　组

1.（1）$C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\dots+C_n^ma^{n-m}b^m+\dots+C_n^nb^n$，$n\in\mathbf{N}_+$; 二项式定理; $n+1$; a; b; n.

（2）$C_n^m a^{n-m} b^m$；m+1.（3）15360；（4）60.

2．（1）A　（2）D　（3）C　（4）B

3．$81x^2+108x+54+\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}$．

B　组

1．（1）A　　（2）C

2．（1）10；（2）－160．

3．提示：将 89^9+87 变为 $(88+1)^9+87$.

4．7．

【知识链接】

1．$(x+\frac{1}{x})^4=C_4^0x^4+C_4^1x^3(\frac{1}{x})^1+C_4^2x^2(\frac{1}{x})^2+C_4^3x^1(\frac{1}{x})^3+C_4^4(\frac{1}{x})^4$

$=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$.

2．（32，32）．

21.2.2　二项式系数的性质

【同步训练 21.2.2】

A　组

1.（1）相等；中间项.（2）2^n；2^{n-1}.（3）256；（4）10.

2．（1）B　（2）A　（3）B　（4）B．

3．15．

B　组

1．（1）D（2）D（3）B（4）A．

2．（1）4 或 5；（2）70；（3）0．

3．1（提示：令 x=-1）

【知识链接】

（1）{1，2，3，4，5，6}；

（2）4，5，6；

（3）$\frac{1}{2}$.

21.3　离散型随机变量及其分布

21.3.1　离散型随机变量

【同步训练 21.3.1】

A　组

1.（1）B；（2）C．

2.（1）√;（2）√ ;（3）×;（4）√ ;（5）×.

3. （1）0，1，2，3，4;（2）$\frac{1}{6}$;　　（3）

ξ	0	1
P	0.3	0.7

4.（1）　　（2）略

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

5. 解：(1）取得次品数ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{C_3^0C_{12}^2}{C_{15}^2}$	$\frac{C_3^1C_{12}^1}{C_{15}^2}$	$\frac{C_3^2C_{12}^0}{C_{15}^2}$

即

ξ	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

（2）$P(\xi\le1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{22}{35}+\frac{12}{35}=\frac{34}{35}$

6. 解： 假设这批产品中含有 3 件次品，从中任取 5 件所含次品数为ξ，根据题意知，ξ 服从超几何分布，其分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{C_{47}^5C_3^0}{C_{50}^5}\approx0.7240$	$\frac{C_{47}^4C_3^1}{C_{50}^5}\approx0.2525$	$\frac{C_{47}^3C_3^2}{C_{50}^5}\approx0.023$	$\frac{C_{47}^2C_3^3}{C_{50}^5}\approx0.0005$

因为 $P(\xi\ge2)\approx0.023+0.0005=0.0235<0.05$.

所以事件“从中任取 5 件，发现 2 件次品”为小概率事件. 根据小概率原理，可判定这批产品不合格.

B　组

1. （1）D;（2）B .

2. （1）0，1，2;（2）$\frac{3}{16}$.

3. 解： 取得次品数ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{C_{45}^4C_5^0}{C_{50}^4}$	$\frac{C_{45}^3C_5^1}{C_{50}^4}$	$\frac{C_{45}^2C_5^2}{C_{50}^4}$	$\frac{C_{45}^1C_5^3}{C_{50}^4}$	$\frac{C_{45}^0C_5^4}{C_{50}^4}$

即

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{4527}{6580}$	$\frac{1419}{4606}$	$\frac{99}{2303}$	$\frac{9}{4606}$	$\frac{1}{46060}$

4. 解： 假设这批产品中有 2 件不合格，从中任取 4 件所含不合格产品的件数为ξ，根据题意知，ξ 服从超几何分布，其分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{C_{298}^{4}C_{2}^{0}}{C_{300}^{4}}\approx0.9735$	$\frac{C_{298}^{3}C_{2}^{1}}{C_{300}^{4}}\approx0.0264$	$\frac{C_{298}^{2}C_{2}^{2}}{C_{300}^{4}}\approx0.0001$

因为 $P(\xi\geq1)\approx0.0264+0.0001=0.0265<0.05$

所以事件“从中任取 4 件，发现不合格品”为小概率事件． 根据小概率原理，可判定这批产品不符合出口规定．

5．解： 假设这批产品的次品率为 0.01，即这 500 件产品中含有 495 件正品，5 件次品．从中任取 3 件所含的次品数为ξ，则ξ 的可能取值为 0，1，2，3．依据超几何分布及概率分布列的性质得：$P(\xi=0)=\frac{C_{495}^{3}C_{5}^{0}}{C_{500}^{3}}\approx0.97$；$P(\xi\geq1)=1-P(\xi=0)\approx0.03<0.05$．

由此知事件“从中任取 3 件，有次品”为小概率事件． 根据小概率原理，可判定这批产品不合格．

【知识链接】

（1）0.12；　（2）0.39；　（3）0.39；　（4）0.38．

21.3.2　二项分布

【同步训练 21.3.2】

A　组

1．

甲获胜的次数	0	1	2	3
相应的概率	0.064	0.288	0.432	0.216

2．解：$P(\xi=0)=C_4^0 0.8^0(1-0.8)^4=0.0016$，

$P(\xi=1)=C_4^1 0.8^1(1-0.8)^3=0.0256$，

$P(\xi=2)=C_4^2 0.8^2(1-0.8)^2=0.1536$，

$P(\xi=3)=C_4^3 0.8^3(1-0.8)^1=0.4096$，

$P(\xi=4)=C_4^4 0.8^4(1-0.8)^0=0.4096$．

分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

3．解：$P(\xi=0)=C_3^0 0.03^0(1-0.03)^3=0.91267$，

$P(\xi=1)=C_3^1 0.03^1(1-0.03)^2=0.08468$，

$P(\xi=2)=C_3^2 0.03^2(1-0.03)^1=0.00262$，

$P(\xi=3)=C_3^3 0.03^3(1-0.03)^0=0.00003$，

分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.91267	0.08468	0.00262	0.00003

B　组

1．（1）A ；（2）B ．

2．解：$P(\xi=0)=\ C_3^0 0.7^0(1-0.7)^3=0.027$，

$P(\xi=1)=\ C_3^1 0.7^1(1-0.7)^2=0.189$，

$P(\xi=2)=\ C_3^2 0.7^2(1-0.7)^1=0.441$，

$P(\xi=3)=\ C_3^3 0.7^3(1-0.7)^0=0.343$，

分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

3．解：假设次品率 $p=0.04$，$n=4$，

X	0	1	2	3	4
P	0.84935	0.14156			

不能否定这批产品符合规定.

【知识链接】

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

21.4　正 态 分 布

【同步训练 21.4】

A　　组

1．（1）约为 1024 包；（2）约为 1495 包.

2．6 830 套 .

3．（1）约为 683 个；（2）约为 954 个.

B　　组

1． （1）1024 个；（2）约为 498 个.

综合练习 21

一、1．D；2．D；3．C；4．C；5．B；6．B；

7．C；8．D；9．B；10．C；11．A；12．C.

二、1．$\frac{2}{5}$；2．0.4096；3．0.85；4．1 023；5．0,1,2,3 .

三 、1．（1）5 040；（2）720；（3）240；（4）1 440；（5）3 600 .

2．解：展开式的通项为

$T_{m+1}=\ C_7^m x^{7-m}\left(-\frac{1}{x}\right)^m=(-1)^m\ C_9^m x^{7-2m}$

根据题意，有 $7-2m=3$，解得 $m=2$.

因此，x^3 的系数是

$(-1)^3C_7^2=(-1)^3\frac{7\times6}{2\,!}=-21$.

3． 解：① 取得次品数ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}$	$\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}$	$\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}$

即

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

② 次品数ξ 不超过 1 的概率为 $P(\xi\leq1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{2}{3}$

4．解：假设这批产品中含有 2 件次品，从中任取 5 件所含的次品数为ξ，根据题意知，ξ 服从超几何分布，其分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{C_{48}^3C_2^0}{C_{50}^3}\approx0.8824$	$\frac{C_{48}^2C_2^1}{C_{50}^3}\approx0.1151$	$\frac{C_{48}^1C_2^2}{C_{50}^3}\approx0.0025$

因为 $P(\xi\geq1)\approx0.1151+0.0025=0.1176>0.05$，

因为 $P(\xi=2)\approx0.0025<0.05$，

所以事件“从中任取 3 件，发现 1 件次品”可以认为该批产品合格．如果发现 2 件就不能认为该批产品合格．